**線形代数学 演習問題 (6) 次元、Image と Kernel**

担当: 金丸隆志

学籍番号: ________________ 氏名: ________________

**問題 1**

$V_3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ の張る空間 $S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の次元を求めよ。

[**解答**]

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の中から一次独立なベクトルを選んだとき、**選べる最大の個数が次元**である。

まず、3 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立かを調べる。$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1$, $c_2$, $c_3$ が全て 0 となるかどうかを調べるのだった (第五回内容)。成分を書き下して、

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \quad &\text{(i)} \\ -c_1 + 2c_2 &= 0 \quad &\text{(ii)} \\ 3c_2 + 3c_3 &= 0 \quad &\text{(iii)} \end{aligned}$$

(i) + (ii) を実行すると、

$$c_2 + c_3 = 0 \qquad \text{(iv)}$$

であるが、これは (iii) と同じ式を表すので、解は一意に定まらない。例えば $c_3 = k$ と置いたとき、(iv) より $c_2 = -k$、さらに $c_1 = -2k$ となるから、$(c_1, c_2, c_3) = (-2k, -k, k)$ ($k$ は任意) は全て $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を満たす。すなわち、3 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は**一次独立ではない**。すなわち、$S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は 3 次元ではない。

では、次に 2 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立かを調べよう。$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1$, $c_2$ が全て 0 となるかどうかを調べる。成分を書き下して、

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= 0 \\ -c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 3c_2 &= 0 \end{aligned}$$

これを解くと、$c_1 = c_2 = 0$。よって、 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立。以上から、$\underline{S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \text{ は 2 次元}}$。

**問題 2**

以下の行列 $A$ が表す線形変換の像 (Image) と核 (kernel) の次元をそれぞれ求めよ。言い換えると、dim(Im $A$) と dim(Ker $A$) をそれぞれ求める、ということ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

[**方針**]

行列から列ベクトル (縦のベクトル) を全て (ここでは 3 つ) 抜きだし、その張る空間 $S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の次元を求めればそれが dim(Im $A$) である。これは問題 1 の解法と同じ。dim(Ker $A$) は dim(Ker $A$) $= n-$dim(Im $A$) (ここでは $n = 3$) から求めれば良い。

[**解答**]

(1) 行列 $A$ から 3 つの列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を抜きだし、この張る空間 $S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の次元を求めよう。まず、3 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立かを調べる。$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ の成分を書き下して、

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 \quad &\text{(v)} \\ c_1 + c_2 &= 0 \quad &\text{(vi)} \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \quad &\text{(vii)} \end{aligned}$$

これを解くと $c_1 = c_2 = c_3 = 0$。よって、3 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立だから、$S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の次元は 3。よって $\underline{\text{dim(Im } A)=3}$。

また、 $\underline{\text{dim(Ker } A)=}$ 3−dim(Im $A$) = $\underline{0}$。

(2) 行列 $A$ から 3 つの列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ を抜きだし、この張る空間 $S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の次元を求めよう。まず、3 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立かを調べる。$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ の成分を書き下して、

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 0 & \text{(viii)} \\ -c_1 + c_2 - 4c_3 &= 0 & \text{(ix)} \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 & \text{(x)} \end{aligned}$$

((ix) + 4× (x))/3 より

$$c_1 + 3c_2 = 0 \qquad \text{(xi)}$$

(viii), (xi) 式は同じものを表すから、$c_1, c_2, c_3$ は一意に定まらない。例えば、$c_2 = k$ と置いたとき、(viii) 式から $c_1 = -3k$、さらに $c_3 = -c_1 - 2c_2 = 3k - 2k = k$ となり、$(c_1, c_2, c_3) = (-3k, k, k)$ ($k$ は任意) は全て $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を満たす。すなわち、3 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は**一次独立ではない**。すなわち、$S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は 3 次元ではない。

では、次に 2 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立かを調べよう。$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1$, $c_2$ が全て 0 となるかどうかを調べる。成分を書き下して、

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

これを解くと、$c_1 = c_2 = 0$。よって、 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立。以上から、$S\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は 2 次元。

よって $\underline{\dim(\mathrm{Im}\ A){=}2}$。

また、 $\underline{\dim(\mathrm{Ker}\ A){=}}\ 3 - \dim(\mathrm{Im}\ A) = \underline{1}$。