線形代数学 演習問題 (2) 線形写像の行列表現

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿

問題 1

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$ を対応させる写像は、V_3 から V_3 への線形写像である。この写像を行列表現せよ。

[**解答**] $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対する写像を計算すると、順に $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。これを順に並べて、$\underline{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

問題 2

V_4 から V_3 への線形写像 f が $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ を $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$ に写すとき、この写像を行列で表わせ。

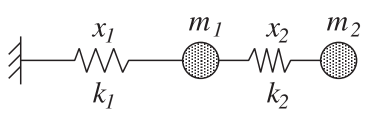
[**解答**] 4 つの基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 \sim \boldsymbol{e}_4$ に対する写像は $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ となる。よって $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$.

問題 3

前回も触れたように、2 つのばねとおもりがつながれた系を考える。この系のばねののびをそれぞれ x_1, x_2 とすると、この系の運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' &= k_1 \frac{m_2}{m_1} x_1 - k_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) x_2 \end{aligned}$$

と表わされる (詳細略)。ただし k_1, k_2 はそれぞれのばねのばね定数であり、m_1, m_2 はそれぞれのおもりの質量である。この運動方程式を $\begin{pmatrix} m_1 x_1'' \\ m_2 x_2'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ のように行列表現したとき、行列 A を求めよ。



[**解答**] $\underline{\begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 \dfrac{m_2}{m_1} & -k_2\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right) \end{pmatrix}}$