フーリエ変換演習 演習問題 (8) フーリエ変換の計算 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

[問題 1] 複素フーリエ級数展開からフーリエ変換へ

図 1 のような概形を持つ非周期信号 $g(t)$ のフーリエ変換 $G(f)$ を求めよ。なお、a は $a > 0$ を満たす実数定数である。

$$g(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

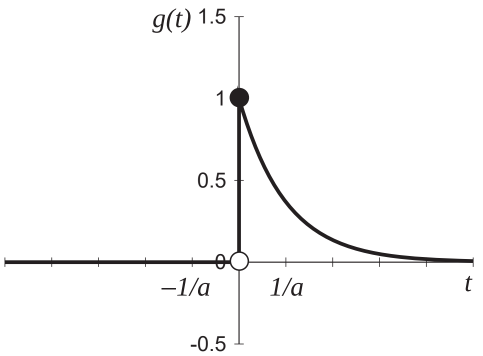

図 1: 関数 $g(t)$ のグラフ

なお、以下の極限は利用してよい。

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^{-(a+2\pi i f)t} &= \lim_{t\to\infty} e^{-at}e^{-2\pi i f t} \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{-at}(\cos(2\pi f t) - i\sin(2\pi f t)) \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{-at}\cos(2\pi f t) \\
&\quad -i\lim_{t\to\infty} e^{-at}\sin(2\pi f t) \\
&= 0 - i \times 0 = 0
\end{aligned}$$

[問題 1 解答]

定義に従って計算する。$t < 0$ では $g(t) = 0$ なので、$t \geq 0$ についてのみ計算すれば良い。

$$\begin{aligned}
G(f) &= \int_0^\infty e^{-at}e^{-2\pi i f t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(a+2\pi i f)t}dt \\
&= \left[-\frac{1}{a+2\pi i f}e^{-(a+2\pi i f)t}\right]_0^\infty \\
&= \underline{\frac{1}{a+2\pi i f}}
\end{aligned}$$

なお、この分子分母に $a - 2\pi i f$ (これまで何度か登場したように $a + 2\pi i f$ の**複素共役**である) を掛けると、

$$\begin{aligned}
G(f) &= \frac{1}{a+2\pi i f}\cdot\frac{a-2\pi i f}{a-2\pi i f} \\
&= \frac{a-2\pi i f}{a^2+(2\pi f)^2} \\
&= \frac{a}{a^2+(2\pi f)^2} + i\frac{-2\pi f}{a^2+(2\pi f)^2}
\end{aligned}$$

となり、$x + iy$ の形に書き直せる (必ずしもこの形に変形する必要はないが)。

[問題 2] 指数関数のフーリエ変換 $G(f)$ の理解

$G(f)$ は「周波数 f をもつ周期信号の重み」を表すのだが、複素フーリエ係数 c_n と同様、$G(f)$ は複素数なのでそのままでは直観的に理解しにくい。そこで、$G(f)$ の絶対値 $|G(f)|$ を用いることが多い。$|G(f)|$ のことを**振幅スペクトル**と呼ぶ。

そこで、振幅スペクトル $|G(f)|$ を計算し、そのグラフの概形を周波数 f の関数としてスケッチせよ。なお、複素フーリエ級数展開と同様、f は正負両方の値を取るのだが、慣習的に $f \geq 0$ のみのグラフを書くことが多い。これは、$|G(f)|$ が原点に対して左右対称になることが一般に知られており、$f \geq 0$ の範囲のみを書けば自動的に $f < 0$ についてもわかるためである (詳細は教科書参照)。

[問題 2 解答]

演習問題 (7) [**問題 2**] で扱ったように計算すれば良い。

$$\begin{aligned}
|G(f)| &= \left|\frac{1}{a+2\pi i f}\right| = \sqrt{\frac{1}{a+2\pi i f}\cdot\left(\frac{1}{a+2\pi i f}\right)^*} \\
&= \sqrt{\frac{1}{a+2\pi i f}\cdot\frac{1}{a-2\pi i f}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{(a+2\pi i f)(a-2\pi i f)}} \\
&= \underline{\frac{1}{\sqrt{a^2+(2\pi f)^2}}}
\end{aligned}$$

この関数を $f \geq 0$ の範囲で描けば図 2 のようになる。

フーリエ変換の考え方により元の信号 $g(t)$ が、周波数 f を持つ周期信号 $e^{i2\pi f t}$ に分解されるわけだが、$|G(f)|$ の大きさが周波数 f を持つ周期信号の重みを表すと考えれば良い。この考え方はフーリエ係数 a_n、b_n や複素フーリエ係数 c_n とほとんど同じであるが、a_n、b_n **や** c_n **の場合はとびとびの周波数 (**n/T**,** n **は整数) をもつ周期関数への分解**であったのに対し、$G(f)$ **の場合は連続な周波数** f **をもつ周期関数への分解**であ

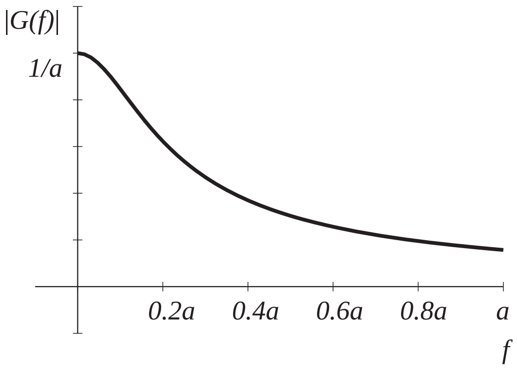

図 2: 図 1 の関数 $g(t)$ の振幅スペクトル $|G(f)|$。$f \geq 0$ の範囲のみ描いた。

る点が異なる。

フーリエ逆変換の定義

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{2\pi i f t} df$$

が整数 n に関する和 ($\sum$) ではなく f に関する積分になっていたのはそのためである。