フーリエ変換演習 演習問題 (7) フーリエ変換を学ぶ準備 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

[補足 1] 周期と周波数、角周波数

これまで周期信号 $g(t)$ を扱って来たが、この周期信号を特徴づける量として周期 T を用いて来た。

この他にも周期信号を特徴づける量として**周波数** f と**角周波数** ω がしばしば用いられ、これらの間には

$$f = 1/T, \quad \omega = 2\pi f = 2\pi/T \tag{1}$$

の関係がある。なお、周期の単位が秒 ([s]) であるとき、周波数 f の単位はヘルツ ([Hz]) であり、「1 秒間に何周期分の信号が現れるか」を表す。更にその際角周波数 ω の単位は [rad/s] であり、1 周期を 2π として「1 秒間に何ラジアン分の信号が現れるか」を表す。周波数 f も角周波数 ω も、周期信号の速さを表す量である。

[補足 2] 分数形をしている複素数の変形

$z = \frac{a+ib}{c+id}$ のように分数形をしている複素数を $z = x+iy$ の形に直すには、分子と分母に分母の複素共役である $c - id$ を掛ければ良い。実際にやってみると、

$$\begin{aligned} \frac{a+ib}{c+id} &= \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id}, \\ &= \frac{(ac+bd) + i(-ad+bc)}{c^2+d^2}, \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \end{aligned}$$

となり、確かに $z = x + iy$ の形に変形できた。

[補足 3] 分数形をしている複素数の複素共役

二つの複素数 z_1、 z_2 があるとき、その割算 z_2/z_1 の複素共役 $(z_2/z_1)^*$ は以下のように書ける。

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^* = \frac{z_2^*}{z_1^*} \tag{2}$$

せっかくなので確認してみよう。$z_1 = c + id$, $z_2 = a + ib$ とし、**[補足 2]** の結果を用いると、

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^* = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

一方、右辺は

$$\begin{aligned} \frac{z_2^*}{z_1^*} &= \frac{a-ib}{c-id} = \frac{a-ib}{c-id} \cdot \frac{c+id}{c+id}, \\ &= \frac{(ac+bd) + i(ad-bc)}{c^2+d^2}, \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \end{aligned}$$

よって、(2) 式が成り立つことが確認できた。