フーリエ変換演習 演習問題 (6) 複素フーリエ級数展開 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] 矩形波の複素フーリエ級数展開

図 1 の矩形波は、$0 \le t < T/2$ で $g(t) = 1$、$T/2 \le t < T$ で $g(t) = -1$ と書ける関数である。

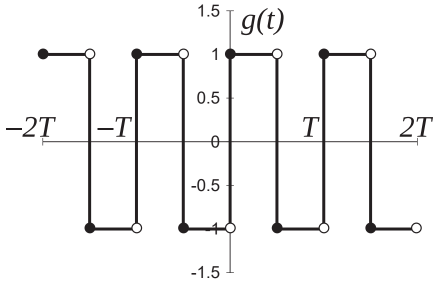

図 1: 周期 T の矩形波

[補足 1] (2) 式の定義に基づき、矩形波の複素フーリエ係数 c_n を計算せよ。

計算の過程において、**[補足 2]**、**[補足 3]**、演習問題 (4) **[問題 5]** などが関連する。

[問題 1 解答]

定義に従って計算すればよい。

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1\cdot e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}(-1)\cdot e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt - \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt \\
&= -\frac{1}{T}\frac{T}{2\pi ni}\left[e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\right]_0^{T/2} + \frac{1}{T}\frac{T}{2\pi ni}\left[e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\right]_{T/2}^{T} \\
&= -\frac{1}{2\pi ni}\left(e^{-in\pi}-1\right) + \frac{1}{2\pi ni}\left(e^{-i2n\pi}-e^{-in\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi ni}\left((-1)^n-1\right) + \frac{1}{2\pi ni}\left(1-(-1)^n\right) \qquad (1) \\
&= \frac{1}{n\pi i}\left(1-(-1)^n\right) = \underline{-\frac{i}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

以上より矩形波の複素フーリエ級数 c_n が求められた。なお、(1) 式の計算には、演習問題 (4) **[問題 5]** に類似した $e^{-in\pi} = (-1)^n$ と $e^{-i2n\pi} = 1$ を用いた。e の肩にマイナス符号が付いている点が演習問題 (4) **[問題 5]** と異なるが、マイナスは角度の回転方向が逆になるだけなので、考え方は全く同じである。

[問題 2] c_n と a_n、b_n の関係

複素フーリエ係数 c_n からフーリエ係数 a_n、b_n を導くことができる。すなわち、**フーリエ級数展開と複素フーリエ級数展開は数学的に等価**ということである。

[補足 4] (3) 式を用いて、**[問題 1]** で求めた c_n から a_n、 b_n を計算せよ。そして、その結果が演習問題 (2) で求めた a_n と b_n とに等しいことを確認せよ。

[問題 2 解答]

[問題 1] で求めた c_n の実部は 0 であるから、

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n = 0$$

一方、 c_n の虚部は $-\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$ であるから、

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

これらは演習問題 (2) で計算した a_n、b_n と等しい。

[問題 3] 複素フーリエ係数 c_n の理解

[補足 5] の解説の通り、複素フーリエ係数 c_n は周期 T/n である振動 $e^{i2\pi nt/T}$ がどの程度信号 $g(t)$ に含まれているかを表すと考えれば良い。**[問題 1]** で求めた矩形波の複素フーリエ係数 c_n に対して以下の問に答えよ。

(a) $|c_n|$ を計算せよ

(b) $|c_n|$ を n $(-\infty < n < \infty)$ に関する棒グラフとして表せ。

[問題 3 解答]

(a)

$$
\begin{aligned}
|c_n| &= \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\right)^2} \\
&= \left|\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\right|
\end{aligned}
$$

となる。

(b) 求めた $|c_n|$ の棒グラフを書くと図 2 となる。この棒グラフの高さが、周期 T/n の振動成分の強さと考えれば理解しやすい。なお、$n < 0$ の場合は逆回転の振動と考えれば良いのだった

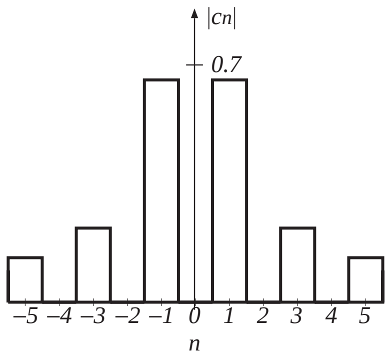

図 2: 矩形波の複素フーリエ係数 c_n の絶対値 $|c_n|$