フーリエ変換演習 演習問題 (6) 複素フーリエ級数展開 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[補足 1] 複素フーリエ級数展開の定義

周期 T の周期信号 $g(t)$ に対する複素フーリエ級数展開は

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \tag{1}$$

と書ける。c_n のことを**複素フーリエ係数**と呼び、以下の式で計算される。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt \tag{2}$$

[補足 2] 積分区間の分割

演習問題 (2) でも登場したが、今回も以下の積分区間の分割の公式が必要となる。

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$$

[補足 3] 複素数関数の積分

演習問題 (5) **[問題 3]** で学んだ通り、e の肩に複素数を含む関数であっても通常通り微分・積分できるのだった。

$$\int e^{iat}dt \quad = \quad \frac{1}{ia}e^{iat} + C = -\frac{i}{a}e^{iat} + C$$

例えば、複素フーリエ級数の計算 (2) 式で登場する関数の場合、$a = -2n\pi/T$ であるので、

$$\begin{aligned}\int e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt &= -\frac{T}{2\pi ni}e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} + C \\ &= \frac{iT}{2\pi n}e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} + C\end{aligned}$$

などと計算できる。最後の計算は、分母の虚数単位 i を分子に持って行くために、分子・分母両方に $-i$ を掛けている (分子・分母両方に i を掛けてもできる)。これは演習問題 (5) **[問題 2]** で学んだことである。

[補足 4] c_n と a_n、b_n の関係

周期 T/n の複素数関数 $e^{i2\pi nt/T}$ を用いる **複素フーリエ級数展開**と周期 T/n の三角関数 $\cos(2\pi nt/T)$ 、$\sin(2\pi nt/T)$ を用いる**フーリエ級数展開**は、見た目は異なるものの数学的に等価であることが知られている。フーリエ係数 a_n、b_n は複素フーリエ係数 c_n から次式で導き出されることが知られている (その理由は教科書参照)。

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n, \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n \tag{3}$$

ただし、Re c_n および Im c_n はそれぞれ複素数 c_n の実部と虚部である。

[補足 5] 複素フーリエ係数 c_n の意味

(実) フーリエ係数 a_n と b_n はともに実数であったが、c_n は複素数となる点に特徴がある。さらに、a_n と b_n は n が 0 または正の整数のときのみであったが、c_n は $-\infty < n < \infty$ において値をとる点が異なる。

c_n は周期が T/n である振動 $e^{i2\pi nt/T}$ がどの程度含まれているかを表すと考えれば良いが、そのままでは複素数であるので理解しにくい。そこで c_n そのものより、その絶対値 $|c_n|$ を考えると理解の助けになる。$|c_n|$ は周期 T/n の振動成分の強さと考えれば理解しやすい。なお、$n < 0$ の場合は逆回転の振動と考えれば良い。

[補足 6] 計算に関する注意

ある実数値を持つ量 X (変数と思っても関数と思っても良い) に関して、以下の式が成り立つ

$$\sqrt{X^2} = |X|$$

ポイントは、**2 乗のルートだからと言って安易に** $= X$ **とすると駄目**で、$X < 0$ の領域も含めて考えると $= |X|$ が正しい、ということである。$\sqrt{(-2)^2} \neq -2$ という具体例を考えればその理由はわかるであろう。

[補足 7] グラフに関する注意

ある関数 $f(x)$ に対し、その絶対値をとった関数 $y = |f(x)|$ をグラフに描くには、まず $y = f(x)$ **のグラフを描き、それが全て** $y > 0$ **の領域に収まるよう** x **軸に関して折り返す**と良い。