フーリエ変換演習 演習問題 (4) 複素フーリエ級数展開を学ぶための準備 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] 複素平面への表示

複素数 $z=x+iy$ を 2 次元平面上の点 (x,y) として表したものを**複素平面 (ガウス平面)** と呼ぶ。以下の複素数を複素平面上に表せ。

(a) $1-2i$ (b) i (c) 1

(d) 2 次方程式 $9x^2+3x+1=0$ の解 (2 つある)

(e) $e^{i\frac{\pi}{3}}$

[問題 1 解答]

解答は図 1 のようになる。なお、次の問題で明らかになるように、(e) は半径 1 の円周上に乗ることに注意。

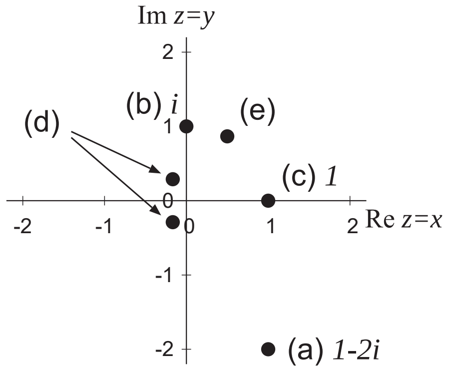

図 1: 複素数の複素平面上への表示

[問題 2] 複素数の絶対値

複素数 $z=x+iy$ の絶対値は

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

と定義される。**[問題 1]**(a)∼(e) の複素数の絶対値をそれぞれ計算せよ。また、その値は **[問題 1]** の複素平面上ではなにを表すか。

[問題 2 解答]

(a) $\sqrt{1^2+(-2)^2}=\underline{\sqrt{5}}$

(b) $\sqrt{0^2+1^2}=\underline{1}$

(c) $\sqrt{1^2+0^2}=\underline{1}$

(d) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{-27}}{18}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{6}$ であり、これは $x=-\dfrac{1}{6}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ と書き直すことができる。異なる二つの複素数が現れるが、絶対値はいずれも以下で計算できる。$\sqrt{\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4}{36}}=\underline{\dfrac{1}{3}}$

(e) オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いると、$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ である。よって絶対値は $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4}{4}}=\underline{1}$

なお、三角関数の公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に注意すれば $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ の形で書ける複素数の絶対値は必ず 1 になることがわかる。

なお複素数の絶対値は、**その点と原点との間の距離**となる。これは、$\sqrt{x^2+y^2}$ という絶対値の定義から明らかであろう。そうすると、$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ という複素数は半径 1 の円周上に乗ることに注意 ((e) がそのような例である)。

[問題 3] 複素数の絶対値 (方法 2)

複素数 $z=x+iy$ に対し、$z^*=x-iy$ を z の**複素共役**という。複素数 z の絶対値は、以下のようにも計算できる。

$$|z|=\sqrt{z\cdot z^*}$$

[問題 1](a)∼(e) の複素数の絶対値をこの方法で計算せよ。**[問題 2]** の結果と同じになることを確認すること。

[問題 3 解答]

(a) $\sqrt{(1-2i)(1+2i)}=\sqrt{1+2i-2i+4}=\underline{\sqrt{5}}$

(b) $\sqrt{(0+i)(0-i)}=\sqrt{1}=\underline{1}$

(c) $\sqrt{(1+0i)(1-0i)}=\underline{1}$

(d) $x=-\dfrac{1}{6}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ に対して

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\left(-\frac{1}{6}\mp\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)}=\sqrt{\frac{1}{36}\pm\frac{\sqrt{3}}{36}i\mp\frac{\sqrt{3}}{36}i+\frac{3}{36}}$$

$=\sqrt{\dfrac{4}{36}}=\underline{\dfrac{1}{3}}$

(e) オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いると、$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ である。よって絶対値は

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{3}{4}}$$

$= \sqrt{\dfrac{4}{4}} = \underline{1}$

なお、$\sqrt{e^{i\pi/3}e^{-i\pi/3}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1$ と計算しても良いことに注意しておく。

[問題 4] 複素平面上の値の読み取り
下図のように複素平面上に表示された点 (a)~(c) の値を読み取れ ([**問題 1**] の逆を行う、ということ)。

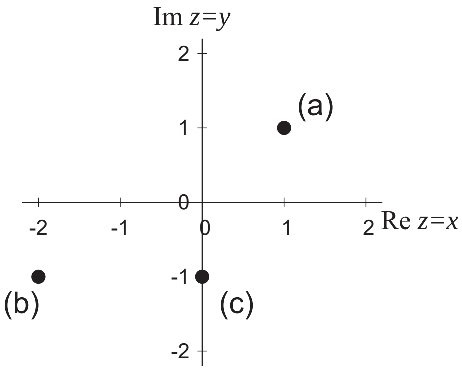

図 2: 複素平面上に表示された複素数の読み取り

[問題 4 解答]
(a) $\underline{1+i}$　(b) $\underline{-2-i}$　(c) $\underline{-i}$

[問題 5] 複素数 $e^{i\theta}$ と複素平面
次式の値を求めよ。
(a) $e^{i2n\pi}$　　(b) $e^{in\pi}$

[問題 5 解答]
図3から直接答えが導け、(a) $\underline{e^{i2n\pi} = 1}$、(b) $\underline{e^{in\pi} = (-1)^n}$ となる。

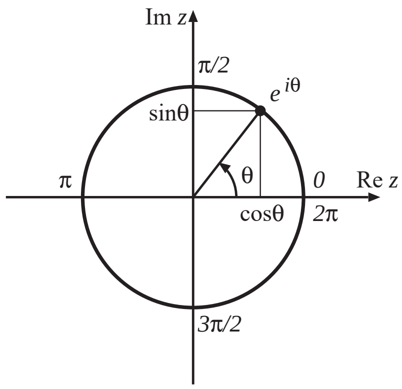

図 3: 複素数 $e^{i\theta}$ と複素平面の関係

もしこの解説がわかりにくければ、$e^{i2n\pi} = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi$ などとしてから演習問題 (2) **(補足編)** で紹介した公式を代入しても良い。