フーリエ変換演習 演習問題 (4) 複素フーリエ級数展開を学ぶための準備 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[補足 1] 虚数単位 i と複素数

虚数単位 i とは、$i^2 = -1$ を満たす数であった。$i = \sqrt{-1}$ と書くこともでき、$\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$ のような使い方をする。さらに、実数 a, b を用いて $z = a + ib$ の形に書ける数のことを**複素数** と呼ぶ。

いま、2 次方程式 $9x^2 + 3x + 1 = 0$ は解と係数の関係より $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{18} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{6}$ と解けるが、これは $x = -\dfrac{1}{6} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,i$ と書き直すことができ、上の複素数の形をしていることがわかる。

[補足 2] 複素平面

複素数 $z = x + iy$ の x を**実部** (real part)、y を**虚部** (imaginary part) と呼ぶ。$x = \mathrm{Re}z$、$y = \mathrm{Im}z$ と表すこともある。

いま、複素数 $z = x + iy$ を 2 次元平面上の点 (x, y) として表すものを**複素平面 (ガウス平面)** と呼ぶ。例えば、複素数 $1 - 2i$ を複素平面上に表すと図 1 のようになる。

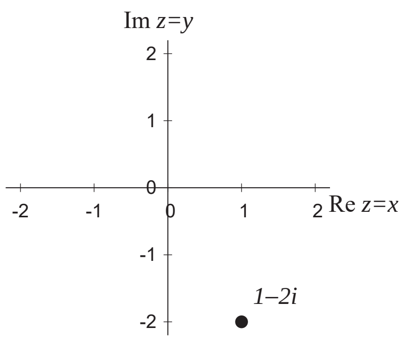

図 1: 複素平面

[補足 3] 複素数の絶対値

複素数 $z = x + iy$ の絶対値は以下で定義される。

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[補足 4] 複素数の乗算

複素数 $x + iy$ と $a + ib$ の乗算は通常のルール通り展開できる。ただし $i^2 = -1$ に注意すること。

$$(x+iy)(a+ib) = xa+ixb+iya+i^2yb = (xa-yb)+i(xb+ya)$$

[補足 5] オイラーの公式

以下の式をオイラーの公式と呼ぶ。エンジニアリングでは常識的に用いられる (電気回路、振動学、制御、etc)。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\cos\theta + i\sin\theta$ は $x + iy$ の形をしているので、複素数である。

余談だが、上式に $\theta = \pi$ を代入した

$$e^{i\pi} = -1$$

は見た目の奇妙さから良く知られている (左辺に e と π という二つの無理数に虚数単位 i が含まれているにも関わらず、右辺は -1 という単純な整数になっているため)。

オイラーの公式が成り立つ理由は両辺のマクローリン展開 (またはテーラー展開) を $\theta = 0$ のまわりで計算すればわかるが、複素平面の考え方に慣れると、オイラーの公式が成り立つのは直観的に納得できるようになる。

[補足 6] $e^{i\theta}$ の複素平面上への表示

複素数 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の複素平面上での座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ であるから、半径 1 の円 (単位円) の円周上に乗る (図 2)。さらに、実部が $\cos\theta$、虚部が $\sin\theta$ であることから、角度 θ はこれまでと同様、x 軸の正の方向となす角度となる (図 2)。

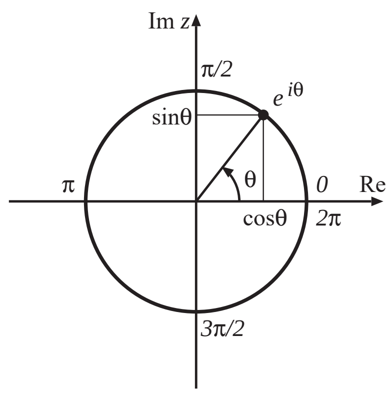

図 2: 複素数 $e^{i\theta}$ と複素平面の関係