フーリエ変換演習 演習問題 (3) フーリエ級数展開の例２ (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] フーリエ級数展開の例２

このように周期 T を持つ関数 $g(t)$ を、周期 T/n (n は正の整数 $1, 2, 3\cdots$) をもつ三角関数の線形和 (定数を掛けて足し算したもの) に分解することを**フーリエ級数展開**というのだった。式で書けば

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \tag{1}$$

である。a_n と b_n が**フーリエ係数**と呼ばれる定数であり、次式で計算できるのだった。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \quad (n \geq 0) \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \quad (n \geq 1) \tag{3}$$

さて、図 1 のような周期 T のノコギリ波のフーリエ級数展開を以下の問に従って計算せよ。

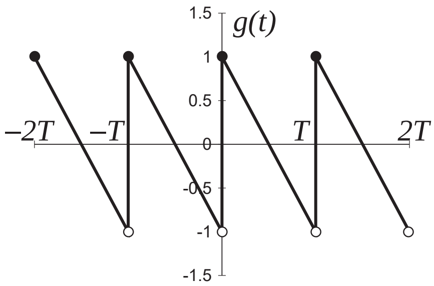

図 1: 周期 T のノコギリ波

(a) $0 \leq t < T$ の範囲では $g(t)$ は直線となっているが、その直線の式を求めよ。

(ヒント): 2 点 (t_1, y_1)、(t_2, y_2) を通る直線の方程式は

$$g(t) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) + y_1 \tag{4}$$

を用いて求められることを思い出そう。

(b) (a) で求めた $g(t)$ の式を用いて、ノコギリ波のフーリエ係数のうち a_n を求めよ。

(ヒント): $g(t)$ を代入して展開した後、$t' = 2\pi nt/T$ の置換積分を行い、その後演習問題 (1) の [**問題 4**] の結果を用いる。

(c) (b) と同様の方法で b_n を計算せよ。

(d) 整数 n ($n = 1, 2, 3\cdots$) に対して b_n の棒グラフを描け。

[問題 1 解答]

(a) 2 点 $(0, 1)$ と $(T, -1)$ を通ることを用いて求めると $\underline{g(t) = -\frac{2}{T}t + 1}$。

(b) 定義に従って計算する。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T \left(-\frac{2}{T}t + 1\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\ &= -\frac{4}{T^2}\int_0^T t\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt + \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \end{aligned} \tag{5}$$

ここで、第 1 項と第 2 項に分けて考える。第 1 項に対しては、ヒントの通り $t' = 2\pi nt/T$ の変数変換を行うと、積分範囲は $[0, 2\pi n]$、$dt' = (2\pi n/T)dt$ となるので、

$$\begin{aligned} (\text{第 1 項}) &= -\frac{4}{T^2}\int_0^{2n\pi}\left(\frac{T}{2\pi n}\right)t'\cos t'\left(\frac{T}{2\pi n}\right)dt' \\ &= -\frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^{2n\pi} t'\cos t' dt' \end{aligned}$$

ここで、演習問題 (1) [**問題 4**](b) の結果を用いると、

$$\begin{aligned} (\text{第 1 項}) &= -\frac{1}{n^2\pi^2}[t\sin t + \cos t]_0^{2n\pi} \\ &= -\frac{1}{n^2\pi^2}[(2n\pi\sin(2n\pi) + \cos(2n\pi)) \\ &\quad -(0\sin 0 + \cos 0)] \\ &= -\frac{1}{n^2\pi^2}[(0+1) - (0+1)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

なお、演習問題 (2) 解答に書かれていた公式 $\cos(2n\pi) = 1$、 $\sin(2n\pi) = 0$ を用いた事に注意。また、(5) 式の第 2 項は公式通りに計算できる。

$$\begin{aligned} (\text{第 2 項}) &= \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_0^T \\ &= \frac{1}{n\pi}(\sin(2n\pi) - \sin 0) \\ &= \frac{1}{n\pi}(0 - 0) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

(6)、(7) 式の結果を (5) 式に代入すると、

$$\underline{a_n = 0}$$

(c) 定義に従って計算する。

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T \left(-\frac{2}{T}t+1\right)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&= -\frac{4}{T^2}\int_0^T t\,\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&\quad +\frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \qquad (8)
\end{aligned}
$$

ここで、第 1 項と第 2 項に分けて考える。第 1 項に対しては、ヒントの通り $t' = 2\pi nt/T$ の変数変換を行うと、積分範囲は $[0, 2\pi n]$、$dt' = (2\pi n/T)dt$ となるので、

$$
\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &= -\frac{4}{T^2}\int_0^{2n\pi}\left(\frac{T}{2\pi n}\right)t'\sin t'\left(\frac{T}{2\pi n}\right)dt' \\
&= -\frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^{2n\pi} t'\sin t' dt'
\end{aligned}
$$

ここで、演習問題 (1) **[問題 4]**(a) の結果を用いると、

$$
\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &= -\frac{1}{n^2\pi^2}[-t\,\cos t+\sin t]_0^{2n\pi} \\
&= -\frac{1}{n^2\pi^2}[(-2n\pi\cos(2n\pi)+\sin(2n\pi)) \\
&\quad -(-0\cos 0+\sin 0)] \\
&= -\frac{1}{n^2\pi^2}(-2n\pi) \\
&= \frac{2}{n\pi} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

なお、演習問題 (2) の解答に書かれていた公式 $\cos(2n\pi) = 1$、 $\sin(2n\pi) = 0$ を用いた事に注意。また、(8) 式の第 2 項は公式通りに計算できる。

$$
\begin{aligned}
(\text{第 2 項}) &= \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&= \frac{2}{T}\left[-\frac{T}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_0^T \\
&= -\frac{1}{n\pi}(\cos(2n\pi)-\cos 0) \\
&= -\frac{1}{n\pi}(1-1) = 0 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

(9)、(10) 式の結果を (8) 式に代入すると、

$$
\underline{b_n = \frac{2}{n\pi}}
$$

(d) 以上の計算より $a_n = 0$、$b_n = \frac{2}{n\pi}$ が分かった。(1) 式のフーリエ変換の定義より、ノコギリ波を三角関数の和に分解すると「cos 成分は 0、sin 成分は n に反比例して減少」することがわかった。b_n の棒グラフは図 2 であり、n が大きい程、速く変動する sin 関数の成分を表す (演習問題 (1) **[問題 1]** や演習問題 (2) の **[問題 1]** 参照)。

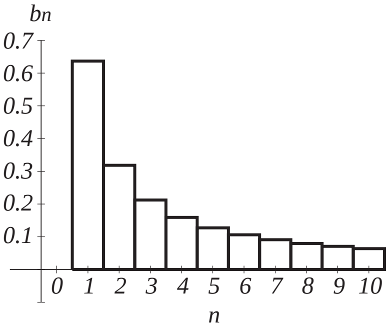

図 2: **[問題 1]**(d) の解答。ノコギリ波のフーリエ係数 b_n

(**補足解説**)

ノコギリ波を完全に再現するには無限個の sin 関数が必要であるが、これを (a) 5 個、 (b) 9 個 で再構成したのが図 3 である。詳細は講義中の解説と教科書 30〜38 ページ (Excel 演習を含む) を参照。

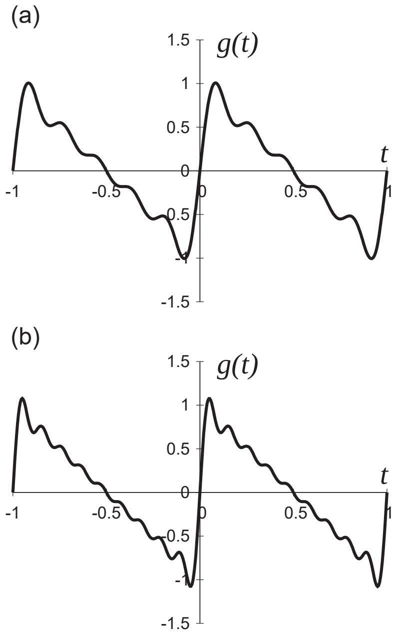

図 3: ノコギリ波の再構成 (a) 第 5 項まで (b) 第 9 項まで