

フーリエ変換演習 演習問題 (3) フーリエ級数展開の例 2 (問題編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: _____

氏名: _____

[問題 1] フーリエ級数展開の例 2

このように周期 T を持つ関数 $g(t)$ を、周期 T/n (n は正の整数 $1, 2, 3, \dots$) をもつ三角関数の線形和 (定数を掛けて足し算したもの) に分解することをフーリエ級数展開というのだった。式で書けば

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \quad (1)$$

である。 a_n と b_n がフーリエ係数と呼ばれる定数であり、次式で計算できるのだった。

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (n \geq 0) \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (n \geq 1) \quad (3)$$

さて、図 1 のような周期 T のノコギリ波のフーリエ級数展開を以下の問に従って計算せよ。

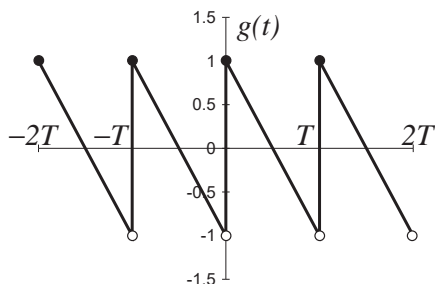


図 1: 周期 T のノコギリ波

(a) $0 \leq t < T$ の範囲では $g(t)$ は直線となっているが、その直線の式を求めよ。

(ヒント): 2点 (t_1, y_1) 、 (t_2, y_2) を通る直線の方程式は

$$g(t) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) + y_1 \quad (4)$$

を用いて求められることを思い出そう。

(b) (a) で求めた $g(t)$ の式を用いて、ノコギリ波のフーリエ係数のうち a_n を求めよ。

(ヒント): $g(t)$ を代入して展開した後、 $t' = 2\pi nt/T$ の置換積分を行い、その後演習問題 (1) の [問題 4] の結果を用いる。

(c) (b) と同様の方法で b_n を計算せよ。

(d) 整数 n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して b_n の棒グラフを描け。