

フーリエ変換演習 演習問題 (3) フーリエ級数展開の例 2 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: \_\_\_\_\_ 氏名: \_\_\_\_\_

[補足 1] 三角関数の積分と微分

演習問題 (2) 同様、以下の積分計算を多用する。

$$\int \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + C \quad (1)$$

$$\int \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = -\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + C \quad (2)$$

前回も書いた通り、実際に覚えるなら汎用性が高い以下の形の方が良いだろう。

$$\int \cos(at) dt = \frac{1}{a} \sin(at) + C \quad (3)$$

$$\int \sin(at) dt = -\frac{1}{a} \cos(at) + C \quad (4)$$

また、今回は積分だけではなく微分も用いるので思い出しておこう。

$$\frac{d}{dt} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = -\frac{2\pi n}{T} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{2\pi n}{T} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (6)$$

[補足 2] 部分積分

不定積分の場合は演習問題 (1) で復習した。

$$\int f(t)g'(t)dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)dt \quad (7)$$

一方、区間  $[a, b]$  の定積分の場合は以下の通りである。

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt \quad (8)$$

今回の問題に対して、この部分積分を自力で適用できる人はそのまま計算を続ければよい。この「**直接部分積分する**」ことができない人は次の「**置換積分+演習問題 (1) の積分結果**」を用いる方が楽かもしれない。どちらを用いるか、二択となる。

[補足 3] 置換積分

部分積分が実行できない人は以下の置換積分および、その次の「演習問題 (1) の積分結果」を用いることになる。これは、 $t$  に関する積分を、(例えば)  $t'$  に関する積分に置換して計算する方法であった。

例えば、関数  $g(kt)$  の  $[a, b]$  区間の積分は、変数  $t' = kt$  の置換に対して

$$\int_a^b g(kt) dt = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} g(t') dt' \quad (9)$$

と計算できる。

[補足 4] 演習問題 (1) の積分結果

演習問題 (1) [問題 4] の結果をそのまま使えば計算が楽になるかもしれない。ただし、[補足 3] の置換積分を適用した後でないこれらは用いることができないので注意。

$$\int_a^b t \sin t dt = [-t \cos t + \sin t]_a^b \quad (10)$$

$$\int_a^b t \cos t dt = [t \sin t + \cos t]_a^b \quad (11)$$

[補足 5] 角度と  $\cos$ 、 $\sin$  の関係

前回の再掲である。これは図を頭に描いて自力で導けるようにしよう。まず、図 1 の単位円を観察しよう。すると、整数  $n$  に対して  $\cos$ 、 $\sin$  に関する以下の関

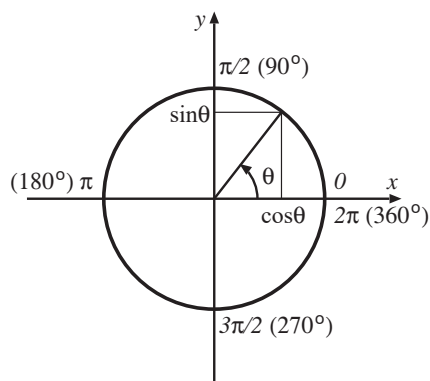


図 1: 角度と  $\cos$  関数、 $\sin$  関数の関係

係がわかる。

$$\cos 2n\pi = 1 \quad (12)$$

$$\sin 2n\pi = 0 \quad (13)$$

$$\cos n\pi = (-1)^n \quad (14)$$

$$\sin n\pi = 0 \quad (15)$$

を用いている。単位円とこれらの公式はこれから何度も登場するので慣れておこう。

もちろん、以下の関係も図から読み取れるはず。

$$\cos 0 = 1 \quad (16)$$

$$\sin 0 = 0 \quad (17)$$