フーリエ変換演習 演習問題 (2) フーリエ級数展開の例 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] 三角関数のグラフ

演習問題 (1) [**問題 1**](d) によって、周期信号 $g(t) = \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の周期が T/n であることがわかった。ここで、n は以後整数と考えることにする。以下の問いに答えよ。

(a) 3 つの関数 $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$、$\sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right)$、 $\sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right)$ のグラフを描け。

(b) 3 つの関数 $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$、$\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)$、 $\cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right)$ のグラフを描け。

[問題 1 解答]

小さいが下図の通り。上から順に周期が T、$T/2$、$T/3$ となっていることに注意すること。n が大きくなるほど振動が速くなる、とも言える。

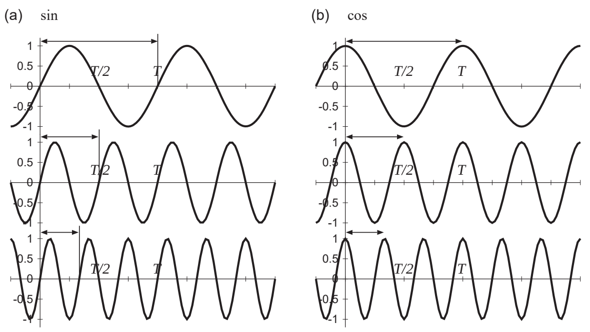

図 1: 各三角関数のグラフ

[問題 2] フーリエ級数展開の例

図 2 のような周期 T の矩形波 (くけいは) を考える。このように周期 T を持つ関数 $g(t)$ を、周期 T/n (n

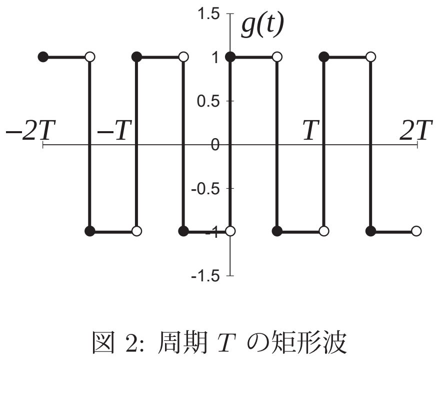

図 2: 周期 T の矩形波

は正の整数 $1, 2, 3\cdots$) をもつ三角関数の線形和 (定数を掛けて足し算したもの) に分解することを**フーリエ級数展開**という。式で書けば

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \tag{1}$$

である。a_n と b_n が**フーリエ係数**と呼ばれる定数であり、次式で計算できることが知られている。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \quad (n \geq 0) \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \quad (n \geq 1) \tag{3}$$

(a) (2) 式を用いて、図 2 の矩形波のフーリエ係数 a_n を求めよ。$0 \sim T$ の範囲での積分が必要であるが、矩形波は $0 \leq t < T/2$ の範囲で $g(t) = 1$、$T/2 \leq t < T$ の範囲で $g(t) = -1$ という値をとる関数であることに注意すること。

(b) 前問 (a) と同様に、(3) 式を用いて図 2 の矩形波のフーリエ係数 b_n を求めよ。

(c) 前問 (b) で求めた b_n を、整数 n ($n \geq 1$) に対する棒グラフにして表せ。$n = 1, 2, 3\cdots$ を代入してゆくと、偶数と奇数で振舞いが変わることに気づくはず。b_n は「信号 $g(t)$ に $\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の成分がどれだけ含まれているか」を表す。(裏も使って良い)

[問題 2 解答]

(a) a_n の導出は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(-1)\cdot\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_0^{T/2} - \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - 0) - \frac{1}{n\pi}(\sin 2n\pi - \sin n\pi) \\
&= \frac{1}{n\pi}(0-0) - \frac{1}{n\pi}(0-0) = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

(b) 同様に、b_n の導出は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&\quad + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(-1)\cdot\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&= \frac{2}{T}\left[-\frac{T}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_0^{T/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2}{T}\left[-\frac{T}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_{T/2}^{T} \\
= & -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1) + \frac{1}{n\pi}(\cos 2n\pi - \cos n\pi) \\
= & \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \\
= & \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ただし、上記の計算には図 3 の単位円を観察して得ら

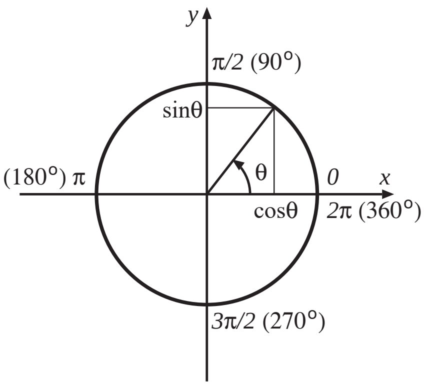

図 3: 角度と cos 関数、 sin 関数の関係

れる公式

$$
\begin{aligned}
\cos 2n\pi &= 1 && (6) \\
\sin 2n\pi &= 0 && (7) \\
\cos n\pi &= (-1)^n && (8) \\
\sin n\pi &= 0 && (9)
\end{aligned}
$$

を用いている (n は整数)。単位円とこれらの公式はこれから何度も登場するので慣れておこう。

(4) 式と (5) 式の a_n と b_n を用いて、**周期関数である矩形波が三角関数の線形和で表された**ことになる。
(c) 以上の計算より $a_n = 0$、$b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$ が分かった。b_n に n を代入して計算して行けば、n が奇数のときのみ b_n は非 0 の値を取り、n が偶数のときは $b_n = 0$ となることがわかる。n が大きい程、速く変動する sin 関数の成分を表す (演習問題 (1) [**問題 1**] および今回の演習の [**問題 1**] 参照)。

(**補足解説**)
矩形波を完全に再現するには無限個の sin 関数が必要であるが、これを (a) 5 個、 (b) 9 個 で再構成したのが図 5 である。n を大きくする程、矩形波に近付くことがわかる。教科書 30〜38 ページ (Excel 演習を含む) にも解説がある。式計算だけではなく、三角関数へと分解する、という意味も理解して欲しい。

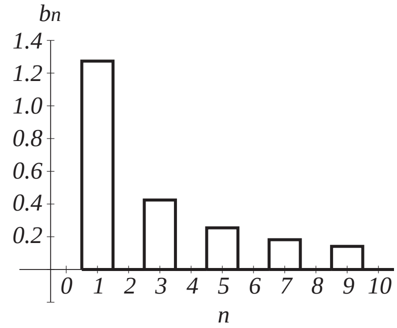

図 4: [**問題 2**](c) の解答。矩形波のフーリエ係数 b_n

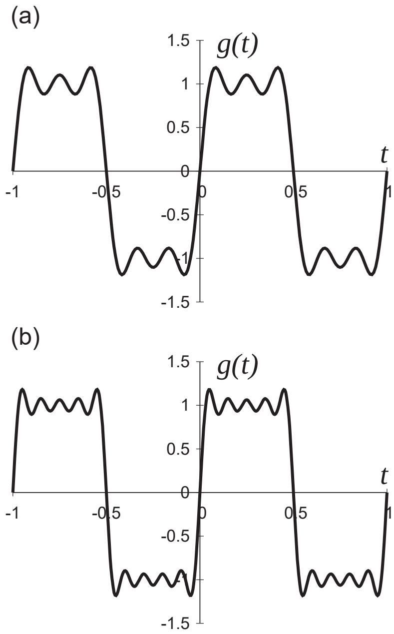

図 5: 矩形波の再構成 (a) 第 5 項まで (b) 第 9 項まで