フーリエ変換演習 演習問題 (2) フーリエ級数展開の例 (問題編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ________________ 氏名: ________________

[問題 1] 三角関数のグラフ

演習問題 (1) **[問題 1]**(d) によって、周期信号 $g(t) = \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の周期が T/n であることがわかった。ここで、n は以後整数と考えることにする。以下の問いに答えよ。

(a) 3 つの関数 $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$、$\sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right)$、 $\sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right)$ のグラフを描け。

(b) 3 つの関数 $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$、$\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)$、 $\cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right)$ のグラフを描け。

[問題 2] フーリエ級数展開の例

図 1 のような周期 T の矩形波 (くけいは) を考える。このように周期 T を持つ関数 $g(t)$ を、周期 T/n (n

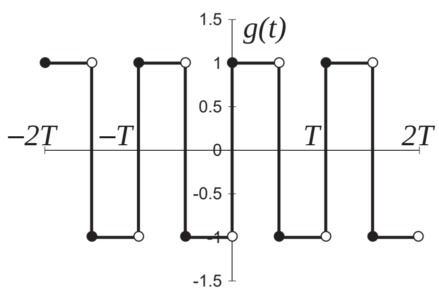

図 1: 周期 T の矩形波

は正の整数 $1, 2, 3 \cdots$) をもつ三角関数の線形和 (定数を掛けて足し算したもの) に分解することを**フーリエ級数展開**という。

式で書けば

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \qquad (1)$$

である。a_n と b_n が**フーリエ係数**と呼ばれる定数であり、次式で計算できることが知られている。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \quad (n \geq 0) \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \quad (n \geq 1) \qquad (3)$$

(a) (2) 式を用いて、図 1 の矩形波のフーリエ係数 a_n を求めよ。$0 \sim T$ の範囲での積分が必要であるが、矩形波は $0 \leq t < T/2$ の範囲で $g(t) = 1$、$T/2 \leq t < T$ の範囲で $g(t) = -1$ という値をとる関数であることに注意すること。

(b) 前問 (a) と同様に、(3) 式を用いて図 1 の矩形波のフーリエ係数 b_n を求めよ。

(c) 前問 (b) で求めた b_n を、整数 n ($n \geq 1$) に対する棒グラフにして表せ。$n = 1, 2, 3 \cdots$ を代入してゆくと、偶数と奇数で振舞いが変わることに気づくはず。b_n は「信号 $g(t)$ に $\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の成分がどれだけ含まれているか」を表す。(裏も使って良い)