微分方程式論 (12) 微分方程式の解のグラフ (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ________________ 氏名: ________________

[補足 1]
摩擦ありのばねの運動方程式

$$x'' + 2x' + 2x = 0$$

を考える ($m = 1,\ \delta = 2,\ k = 2$ ということ)。
(a) 一般解を求めよ。
(b) 時刻 $t = 0$ で $x = 1,\ dx/dt = 0$ を満たす解を求め、そのグラフを $0 \le t \le 2\pi$ の範囲で描け。

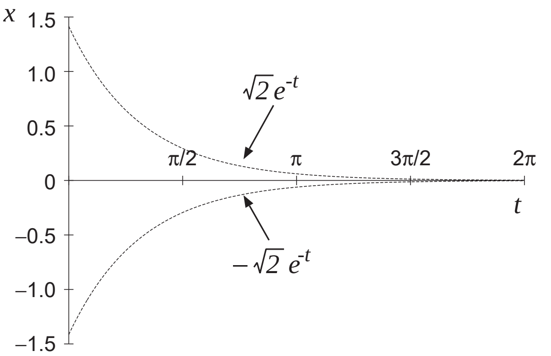

図 1: 補足 1(b) グラフ記入欄。ヒントとして $\sqrt{2}e^{-t}$ と $-\sqrt{2}e^{-t}$ のグラフを示した。

[補足 1 解説]
(a) 解法は資料 (8) を参照すること。
$x = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$
(b) 初期条件「時刻 $t = 0$ で $x = 1,\ dx/dt = 0$ 」を下記の式に代入する。

$$\begin{aligned} x &= e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x' &= -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ &\quad + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) \end{aligned}$$

それにより $C_1 = C_2 = 1$ が計算できるので、
$x = e^{-t}(\cos t + \sin t)$。

グラフを描くためには、$\cos t + \sin t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ と変形する必要がある。このとき用いたのは高校数学で学ぶ三角関数の合成公式である。

$$A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \alpha)$$

ただし

$$\sin\alpha = B/\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\cos\alpha = A/\sqrt{A^2 + B^2},$$

これを用いると、解は $x = \sqrt{2}e^{-t} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ と書ける。このとき、グラフは $\sqrt{2}e^{-t}$ のグラフと $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ のグラフの積と考えるとグラフを描きやすい。

解答欄には $\sqrt{2}e^{-t}$ のグラフがあらかじめ描かれているので、ここに $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ を重ねて描くと下図のようになる。ポイントは「周期 2π であり、$t = -\frac{\pi}{4}$ の位置が原点であるかのように sin のグラフを描く」ことである。

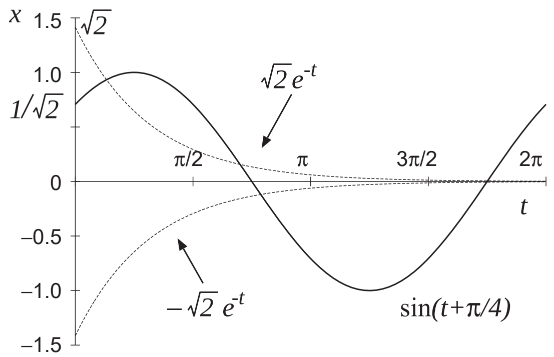

図 2: $\sqrt{2}e^{-t}$ と $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ のグラフ

このグラフを元に、「sin の値が $+1$ のときに $\sqrt{2}e^{-t}$ のグラフと一致する」、「sin の値が -1 のときに $-\sqrt{2}e^{-t}$ のグラフと一致する」などに注意してグラフを描くと下図のようになり、これが解答である。ばねと重りの減衰振動のグラフであることがわかる。

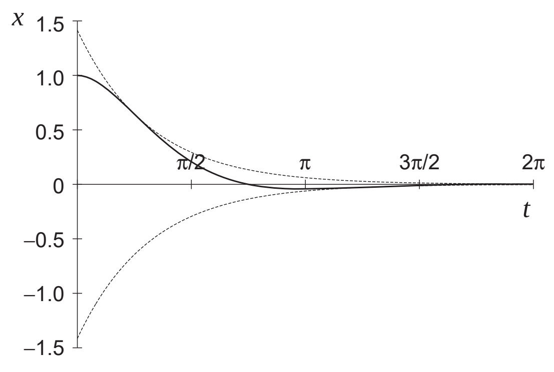

図 3: **[補足 1]**(b) 解答

[**補足 2**]
摩擦ありのばねに周期的な力が加わった運動方程式

$$x'' + 2x' + 2x = \cos(2t)$$

を考える。
(a) 一般解を求めよ。[**補足 1**](a) の結果も使うこと。
(b) 時刻 $t = 0$ で $x = dx/dt = 0$ を満たす解を求めよ。さらに、この解のグラフを $2\pi \le t \le 4\pi$ の範囲で [**補足 1**](b) と同様に描け。

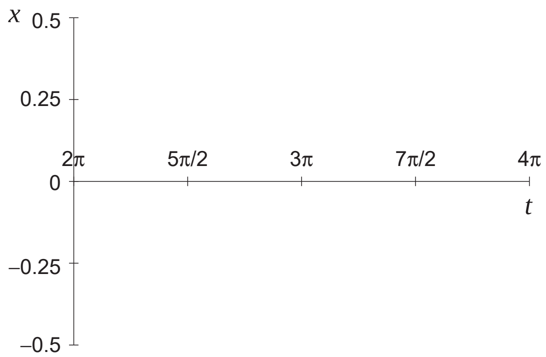

図 4: [**補足 2**](b) グラフ記入欄

[**補足 2 解説**]
(a) 以下に簡略化した解法を示す。詳細な解法は資料 (11) を参照すること。

斉次方程式の一般解は [**補足 1**](a) と同じである。ここで $x_{特別} = A\cos 2t + B\sin 2t$ という形の解を仮定する。問題の微分方程式に代入すると、$A = -1/10$, $B = 1/5$ を得る。

よって $x_{特別} = -\frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t$ という特別解を得る。斉次の一般解と合わせると
$\underline{x = -\frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t + e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)}$
(b) 初期条件「時刻 $t = 0$ で $x = dx/dt = 0$」を下記に代入する。

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t + e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) \\ x' &= \frac{1}{5}\sin 2t + \frac{2}{5}\cos 2t - e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) \\ &\quad + e^{-t}(-C_1\sin t + C_2\cos t) \end{aligned}$$

これにより $C_1 = 1/10$, $C_2 = -3/10$ が得られるので、
$\underline{x = -\frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t + e^{-t}(\frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t)}$

グラフであるが、[**補足 1**](b) より $t \ge 2\pi$ では e^{-t} が掛けられている項はほぼ 0 に収束することがわかる。そのため、$x = -\frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t$ の方のみを描けば求めるグラフになる。

このとき、$x = \frac{\sqrt{5}}{10}\sin(2t+\alpha)$ (ただし $\sin\alpha = -1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$) となる。α という角度を明示的に求めることはできないが、下図の作図によりおおよそのイメージがつかめる。図のように $\alpha = -\phi$ という正の角度 ϕ

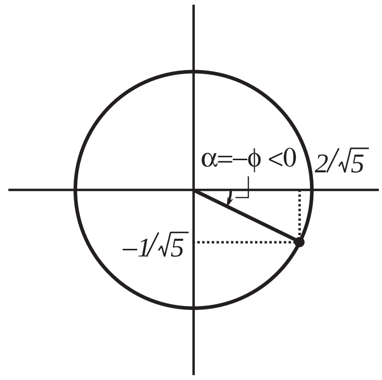

図 5: [**補足 2**](b) α の値を目安を知るための作図

を導入すると、$x = \frac{\sqrt{5}}{10}\sin(2t+\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{10}\sin(2\,(t-\phi/2))$ と変形できるため、描くべきグラフは「周期 π であり、$t = \phi/2$ を原点と思って描いた $\sin$ の $\sqrt{5}/10$ 倍」のグラフとなる。

グラフは次の通り。

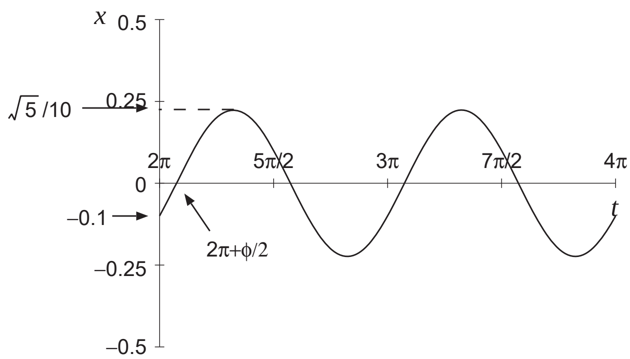

図 6: [**補足 2**](b) 解答