微分方程式論 (10) 定数係数の 2 階非斉次線形微分方程式 (1) (未定係数法) (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

[補足 0] 一般的な解法

今回は以下の形式の微分方程式を解く。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t) \tag{0}$$

右辺を $f(t) = 0$ とすれば、これは前回まで学んできた**2 階斉次線形微分方程式**に他ならない。$f(t) \neq 0$ の場合を**2 階非斉次線形微分方程式**と呼ぶ。この解法として**未定係数法**と**定数変化法**が知られているが、本講義では計算量の少ない**未定係数法**を紹介する。

[**未定係数法 Step 1**]

$f(t) = 0$ とし、斉次微分方程式をあらかじめ解いておく。一般的に書けば $x_{斉次}(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t)$ となるのだった (特性方程式の解によって、$g_1(t)$, $g_2(t)$ は指数関数や三角関数になる)。

[**未定係数法 Step 2**]

$f(t) \neq 0$ の**非斉次**微分方程式 (0) 式を満たす解を一つ見つける。これを**特殊解**といい、$x_{特殊}(t)$ と書く。どのように見つけるのかは問題による (後述) が、このステップが今回のポイントとなる。

[**未定係数法 Step 3**]

$x_{斉次}(t)$ と $x_{特殊}(t)$ とを足し合わせた
$\underline{x(t) = x_{特殊}(t) + x_{斉次}(t)}$ が求める一般解である。

これだけではわかりにくいので、以下で具体的な例を用いて解説する。

[補足 1] 例題 1

以下の微分方程式を解け。ただし、α, β, γ は $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \neq \beta$ を満たす実数定数であるとする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\alpha+\beta)\frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = e^{\gamma t} \tag{1}$$

[Step 1]

まず、(1) 式右辺=0 とした斉次微分方程式の一般解を求める。$x = e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定して得られる特性方程式

$$\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$$

を解くと 2 つの 2 実数解 $\lambda = \alpha, \beta$ が得られるので、この斉次微分方程式の一般解は $x_{斉次}(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ である。

[Step 2]

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。ここで、非斉次微分方程式の右辺に着目し、$x_{特殊}(t) = Ae^{\gamma t}$ の形の特殊解を仮定し、非斉次微分方程式 (1) 式が満たされるよう A を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned} x'_{特殊}(t) &= A\gamma e^{\gamma t} \\ x''_{特殊}(t) &= A\gamma^2 e^{\gamma t} \end{aligned}$$

となるので、非斉次微分方程式 (1) 式に代入する。

$$\begin{aligned} &A\gamma^2 e^{\gamma t} - (\alpha+\beta)A\gamma e^{\gamma t} + \alpha\beta A e^{\gamma t} = e^{\gamma t} \\ &A(\gamma^2 - (\alpha+\beta)\gamma + \alpha\beta)e^{\gamma t} = e^{\gamma t} \\ &A(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 1 \\ &A = \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \end{aligned}$$

よって、特殊解は $x_{特殊}(t) = \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} e^{\gamma t}$ である。

[Step 3]

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$\underline{x(t) = \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} e^{\gamma t} + C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}}$$

である。

[補足 2] 例題 2

以下の微分方程式を解け。ただし、α, β は $\alpha \neq \beta$ を満たす実数定数であるとする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\alpha+\beta)\frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = e^{\alpha t} \tag{2}$$

[Step 1]

[補足 1] との違いは、右辺の指数関数の肩の部分のみである。まず、(2) 式右辺=0 とした斉次微分方程式の一般解を求めるが、これは **[補足 1]** と同じく $x_{斉次}(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ である。

[Step 2]

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。ここで **[補足 1]** の真似をすると $x_{特殊}(t) = Ae^{\alpha t}$ と仮定したくなるが、これでは二重の意味で正しくない。それは以下の理由による。

- $Ae^{\alpha t}$ は斉次微分方程式の一般解 $x_{斉次}(t)$ に含まれている。$x_{斉次}(t)$ とは異なる特殊解を見つけなければならない

- そもそも $e^{\alpha t}$ は非斉次微分方程式 (2) 式を満たし得ない (代入してみるとわかる)

この場合どうすべきかというと、$x_{特殊}(t) = A\,t\,e^{\alpha t}$ **の形を仮定**する。これが非斉次微分方程式 (2) 式を満たすよう A を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned} x'_{特殊}(t) &= Ae^{\alpha t} + A\,t\,\alpha e^{\alpha t} \\ &= A(1+\alpha t)e^{\alpha t} \\ x''_{特殊}(t) &= A\alpha e^{\alpha t} + A\alpha(1+\alpha t)e^{\alpha t} \\ &= A(2\alpha + \alpha^2 t)e^{\alpha t} \end{aligned}$$

となる。積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$ を用いていることに注意。これらを非斉次微分方程式 (2) 式に代入して A を定める。

$$\begin{aligned} &A(2\alpha+\alpha^2 t)e^{\alpha t} - (\alpha+\beta)A(1+\alpha t)e^{\alpha t} + \alpha\beta A\,t\,e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \\ &\quad A(\alpha-\beta)e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \\ &\quad A = \frac{1}{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

よって、特殊解は $x_{特殊}(t) = \frac{1}{\alpha-\beta}\,t\,e^{\alpha t}$ である。

[Step 3]

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{\alpha-\beta}\,t\,e^{\alpha t} + C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}}$$

である。