微分方程式論 (8) 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式 (2) (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

[補足 1] 特性方程式の解が複素数の場合

前回、微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0 \qquad (1)$$

に対し、$x = e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定し、特性方程式

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (2)$$

に持ち込むという解法を学んだ。前回は、特性方程式が「異なる二実数解」を持つ場合のみを取り扱った。

今回は特性方程式の解が二つの複素数解 $\alpha, \beta = \gamma \pm i\omega$ となる場合を取り扱う (γ, ω は実数, i は虚数単位)。その場合も解は $x = C_1 e^{(\gamma+i\omega)t} + C_2 e^{(\gamma-i\omega)t}$ であり、これで数学的には間違いではないが、解答の意味を考える場合これではわかりにくい。なぜかというと、物理や工学などでは、解答として実数を求めることが多いが、$e^{(\gamma\pm i\omega)t}$ はそのままでは複素数であり、解のイメージを掴みにくいためである。そのため、**本演習では $x = C_1 e^{(\gamma+i\omega)t} + C_2 e^{(\gamma-i\omega)t}$ のままの解答は間違いとする。**

これをどのように変形して解答とすべきかを以下で述べる。まず、指数関数の性質を用いて

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{(\gamma+i\omega)t} + C_2 e^{(\gamma-i\omega)t} \\ &= C_1 e^{\gamma t} e^{i\omega t} + C_2 e^{\gamma t} e^{-i\omega t} \\ &= e^{\gamma t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

と変形できる。指数関数の変形ができない学生が多いが、ここでつまづかないこと。

次に、括弧内の変形に移るが、ここでオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いる。

$$\begin{aligned} x &= e^{\gamma t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{\gamma t}(C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\sin\omega t)) \end{aligned}$$

最後の式の変形には $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ を用いていることに注意。さらに計算を続ければ

$$\begin{aligned} x &= e^{\gamma t}((C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t) \\ &= e^{\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \end{aligned}$$

ここで、新たな任意定数 $A = C_1 + C_2$、$B = i(C_1 - C_2)$ を定義した。この形、すなわち $\underline{x = e^{\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}$ (A, B は任意定数) が正式な解である。

さらに、三角関数の性質として、$A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は $K_1\cos(\omega t + \phi_1)$ や $K_2\cos(\omega t + \phi_2)$ などとも書けるので、$\underline{x = K_1 e^{\gamma t}\cos(\omega t + \phi_1)}$ (K_1, ϕ_1 は任意定数) や $\underline{x = K_2 e^{\gamma t}\sin(\omega t + \phi_2)}$ (K_2, ϕ_2 は任意定数) でも正しい解である。

ちなみに、$A\cos\omega t + B\sin\omega t$ が $K_1\cos(\omega t + \phi_1)$ と書けることも示しておこう。$K_1\cos(\omega t + \phi_1)$ を加法定理を用いて分解して

$$\begin{aligned} K_1\cos(\omega t + \phi_1) &= K_1\cos\omega t\cos\phi_1 - K_1\sin\omega t\sin\phi_1 \\ & (K_1\cos\phi_1)\cos\omega t - (K_1\sin\phi_1)\sin\omega t \\ & A\cos\omega t + B\sin\omega t \end{aligned}$$

と書ける。ただし、$A = K_1\cos\phi_1,\ B = -K_1\sin\phi_1$ とした。

[覚えておくべきこと]

上で学んだことをまとめると、特性方程式の解が複素数である場合の問題を解く場合、以下の 4 つの形式が数学的に等価であることを覚えておくと、問題を解くのがスムーズになる。

- $C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$
- $A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- $K_1\cos(\omega t + \phi_1)$
- $K_2\sin(\omega t + \phi_2)$

ただし、$C_1,\ C_2,\ A,\ B,\ K_1,\ \phi_1,\ K_2,\ \phi_2$ は全て任意定数。

なお、「丸暗記」というよりは、忘れたときにオイラーの公式や加法定理を用いて自分で導き出せる、という意味で覚えておく、ということである。