# 微分方程式論 (7) 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________________ 氏名: ____________________

**[問題 1]**

以下の微分方程式を解け。

(a) $x'' - x' - 6x = 0$

(b) $x'' + 3x' - 4x = 0$

(c) $x'' + 4x' - x = 0$

**[問題 1 解説]**

(a) 特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ を解くと、$\lambda = -2, 3$。よって、$\underline{x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}}$ ($C_1, C_2$ は任意定数)。

(b) 特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ を解くと、$\lambda = -4, 1$。よって、$\underline{x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{t}}$ ($C_1, C_2$ は任意定数)。

(c) 特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$ を解くと、$\lambda = -2 \pm \sqrt{5}$。よって、$\underline{x = C_1 e^{(-2-\sqrt{5})t} + C_2 e^{(-2+\sqrt{5})t}}$ ($C_1, C_2$ は任意定数)。

**[問題 2]**

ばね定数 $k$ のばねにつながれた質量 $m$ のおもりを考える。動摩擦係数 $\gamma$ も考慮する場合、運動方程式は下記のようになる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - kx$$

$m = 1, \gamma = 4, k = 1$ のとき、この微分方程式を解け。$x$ はばねの自然長からののびを表す。なお、時刻 $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = 0$ を満たすような解とすること。

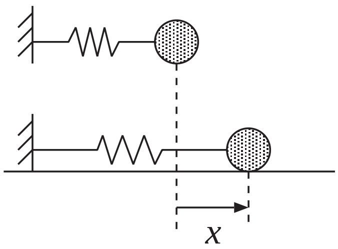


図 1: ばね系

**[問題 2 解説]**

微分方程式は $x'' + 4x' + x = 0$ となるので、特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ を解くと、$\lambda = -2 \pm \sqrt{3}$。よって、一般解は $x = C_1 e^{(-2-\sqrt{3})t} + C_2 e^{(-2+\sqrt{3})t}$ ($C_1, C_2$ は任意定数)。

この一般解に「時刻 $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = 0$」という初期条件を適用することで、$C_1$ と $C_2$ を定める。一般解を微分すると $x' = (-2-\sqrt{3})C_1 e^{(-2-\sqrt{3})t} + (-2+\sqrt{3})C_2 e^{(-2+\sqrt{3})t}$ となるので、

$$C_1 + C_2 = x_0 \qquad (1)$$

$$(-2-\sqrt{3})C_1 + (-2+\sqrt{3})C_2 = 0 \qquad (2)$$

が得られる。これを解くと、$C_1 = (1/2 - 1/\sqrt{3})x_0$, $C_2 = (1/2 + 1/\sqrt{3})x_0$。よって解は

$$\underline{x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) x_0 e^{(-2-\sqrt{3})t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) x_0 e^{(-2+\sqrt{3})t}}$$