微分方程式論 演習問題 (6) 1 階線形微分方程式 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[**補足**]
$x' + p(t)x = q(t)$
の形の微分方程式を 1 階線形微分方程式という。解法は下記の通りである。

1. $q(t) = 0$ とおいた斉次方程式を変数分離形で解く。その解はこれまで学んだように、任意定数 A を含んだものとなる。
2. 斉次方程式の解における任意定数 A を t の関数 $A(t)$ として問題の方程式に代入し、$A(t)$ を定める (定数変化法)。

具体的には、下記の例題のように進める。

[**例題**]
以下の微分方程式を解け。

$$x' - 2x = e^{3t}$$

これは 1 階線形微分方程式であるので、まず斉次方程式を解いてから定数変化法に持ち込む。すなわち、まず

$$x' - 2x = 0$$

を考える。これは**斉次方程式**であり、**変数分離形**の解法で解くことができる。$x \neq 0$ を仮定し、整理すると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 2$$

となる。両辺を t で積分すると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x}\,dx &= \int 2\,dt \\ \log|x| &= 2t + C \\ |x| &= e^{2t+C} \\ x &= \pm e^{C} e^{2t} \\ x &= Ae^{2t} \quad (A \neq 0) \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

ここで、$x = 0$ を仮定すると、これも問題の微分方程式を満たす。これは (i) 式において $A = 0$ と置いた場合に相当するから、斉次方程式の解は $x = Ae^{2t}$ (A は任意)。

この解の定数 A を t の関数 $A(t)$ とみなす**定数変化法**を用いて、問題の微分方程式を解くことができる。

$x = A(t)e^{2t}$ の形の解を仮定し、これを問題の微分方程式に代入する方針をとる。まず、x の微分は

$$x' = \frac{dA(t)}{dt}e^{2t} + 2A(t)e^{2t}$$

と書ける。ここで $(fg)' = f'g + fg'$ を用いたことに注意。これと $x = A(t)e^{2t}$ を問題の微分方程式の左辺に代入すると、

$$x' - 2x = \frac{dA(t)}{dt}e^{2t} + 2A(t)e^{2t} - 2A(t)e^{2t} = \frac{dA(t)}{dt}e^{2t}$$

これを問題の微分方程式の右辺と結んで、

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt}e^{2t} &= e^{3t} \\ \frac{dA(t)}{dt} &= e^{t} \end{aligned}$$

これを $A(t)$ に関する微分方程式とみなし、両辺を t で積分すると、

$$A(t) = e^{t} + C \quad (C \text{ は任意})$$

これを $x = A(t)e^{2t}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} x &= (e^{t} + C)e^{2t} \\ &= \underline{e^{3t} + Ce^{2t} \quad (C \text{ は任意})} \end{aligned}$$