微分方程式 演習問題 (10) ラプラス変換

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

問題以下の関数をラプラス変換せよ。

1. 1
2. t
3. e^{at}
4. $\sin\omega t$
5. $e^{at}\sin\omega t$　　(4. の結果をうまく用いると楽)

ただし、

- $\displaystyle\lim_{t\to\infty} te^{-kt} = 0 \ (k > 0)$
- $\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-kt}\sin\alpha t = 0 \ (k > 0)$
- $\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-kt}\cos\alpha t = 0 \ (k > 0)$

であることは用いて良い。

[**解答**]

各問の解答に入る前に、問題文にある極限の評価についてコメントしておく。

一つ目の極限については、$t \to \infty$ の極限で t は無限大に、e^{-kt} は 0 に収束するので、全体として無限大となるのか 0 となるのかはすぐにはわからない。この評価にはロピタルの定理

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to a}\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

を用いると良い。すなわち、

$$\lim_{t\to\infty} te^{-kt} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{kt}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{ke^{kt}} = 0$$

というわけである。ラフに言えば、te^{-kt} において「t の発散より e^{-kt} の 0 への収束の方が速いので、全体として 0 へ収束」と理解できる。

また、$e^{-kt}\sin\alpha t$ および $e^{-kt}\cos\alpha t$ $(k > 0)$ であるが、これらは図 1 でわかるように「振幅 が 0 に収束しながら振動する関数」である。これより、$t \to \infty$ で 0 に収束することは解ってもらえると思う。

1.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}dt \qquad \text{(i)} \\ &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left(e^{-s\cdot\infty} - e^{-s\cdot 0}\right) \\ &= -\frac{1}{s}(0-1) \\ &= \frac{1}{s} \quad (\text{ただし、} s \text{ の実部} > 0) \end{aligned}$$

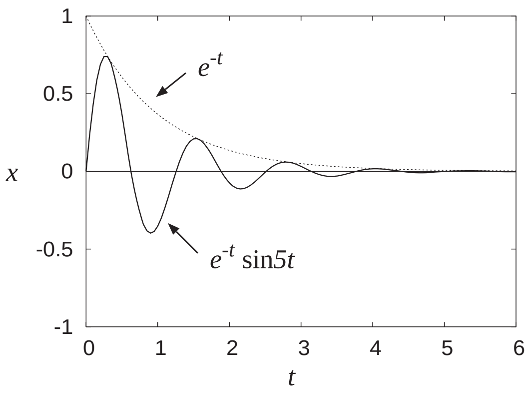

図 1: $e^{-t}\sin 5t$ のグラフ

以上から $\underline{F(s) = \dfrac{1}{s}}$。

2. 部分積分を用いる。

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty te^{-st}dt \\ &= \left[t\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} te^{-st} - 0e^{-s\cdot 0}\right) + \frac{1}{s}\left[\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s}(0-0) - \frac{1}{s^2}\left(e^{-s\cdot\infty} - e^{-s\cdot 0}\right) \\ &= -\frac{1}{s^2}(0-1) \\ &= \frac{1}{s^2} \quad (\text{ただし、} s \text{ の実部} > 0) \end{aligned}$$

ヒントの極限を用いたことに注意。以上から $\underline{F(s) = \dfrac{1}{s^2}}$

3.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \qquad \text{(ii)} \\ &= \left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s-a}\left(e^{-(s-a)\cdot\infty} - e^{(s-a)\cdot 0}\right) \\ &= -\frac{1}{s-a}(0-1) \\ &= \frac{1}{s-a} \quad (\text{ただし、} s \text{ の実部} > a) \end{aligned}$$

以上から $\underline{F(s) = \dfrac{1}{s-a}}$　$(s > a)$。

(**補足**) 今、1. の解 $F(s)=\dfrac{1}{s}$ と 3. の解 $F(s)=\dfrac{1}{s-a}$ の類似性に注目して欲しい。この類似性は (i) 式と (ii) 式の類似性、すなわち (i) 式の s を $s-a$ に置き換えれば (ii) 式が得られることに起因している。

このことに気づくと、ラプラス変換の導出や暗記が楽になる。例えば、(ii) 式の計算において「これは 1 のラプラス変換の結果の s を $s-a$ に置き換えれば良いんだ」ということに気づき、なおかつ 1 のラプラス変換が $1/s$ であることが覚えていれば、直ちに $1/(s-a)$ が得られる、というわけである。

4. これは、**第一回演習で登場した**タイプの問題であり、部分積分を 2 回用いるのが特徴であった。出来ない者も多かったので、ここでしっかり身につけて欲しい。なお、今回は不定積分ではなく定積分なので、若干難度が上がっている。

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt \qquad \text{(iii)}\\
&= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\omega\cos\omega t\,dt\\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty}e^{-st}\sin\omega t - e^{-s\cdot 0}\sin\omega\cdot 0\right)\\
&\quad +\frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt\\
&= \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt\\
&= \frac{\omega}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos\omega t\right]_0^\infty\\
&\quad -\frac{\omega}{s}\int_0^\infty\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}(-\omega)\sin\omega t\,dt\\
&= -\frac{\omega}{s^2}\left(\lim_{t\to\infty}e^{-st}\cos\omega t - e^{-s\cdot 0}\cos\omega\cdot 0\right)\\
&\quad -\frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt\\
&= -\frac{\omega}{s^2}(0-1)-\frac{\omega^2}{s^2}F(s)\\
&= \frac{\omega}{s^2}-\frac{\omega^2}{s^2}F(s)
\end{aligned}
$$

ただし、ヒントの極限を用いたことに注意。最後の式を変型して、

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{\omega}{s^2}-\frac{\omega^2}{s^2}F(s)\\
\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)F(s) &= \frac{\omega}{s^2}\\
\frac{s^2+\omega^2}{s^2}F(s) &= \frac{\omega}{s^2}\\
F(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (\text{ただし、}s\text{ の実部} > 0)
\end{aligned}
$$

よって $\underline{F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}}$

5. まともにやると 4. と同じ計算を再び実行しなければならず無駄が多いので、どこで楽が出来るかを考えるのがポイントである。

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\sin\omega t\,dt\\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\sin\omega t\,dt \qquad \text{(iv)}
\end{aligned}
$$

ここで、(iii) 式と (iv) 式を見くらべると、(iii) 式の s を $s-a$ で置き換えれば (iv) 式が得られることに注意。よって、(4) の解 $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ の s を $s-a$ で置き換えれば良いことがわかる。

よって解は $\underline{F(s)=\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}}$