微分方程式 演習問題 (9) 定数係数の 2 階非斉次線形微分方程式 (定数変化法バージョン)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

問題 以下の微分方程式を解け。

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$
2. $y'' - 2y' + y = e^{x}$
3. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
4. $y'' + 4y = 2\cos 2x$

[**解答**]

(1) まず、(右辺)=0 とおいた**斉次方程式** の解を求める。$y = e^{\lambda x}$ と置いたときに得られる特性方程式を解くと

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0\\ (\lambda-1)(\lambda-2) &= 0\\ \lambda &= 1, 2\end{aligned}$$

よって、**斉次方程式** の基本解は $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ となる。

次に、この基本解より得られるロンスキー行列式を求める。

$$\begin{aligned}W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}\\ &= e^x(2e^{2x}) - e^{2x}e^x = e^{3x}\end{aligned}$$

以上を、定数変化法の公式

$$y = -y_1 \int \frac{y_2 r(x)}{W(x)}dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)}dx$$

に代入すると、問題の微分方程式の**特解**が求められる。ただし、$r(x)$ は問題の**非斉次方程式**の右辺で $r(x) = e^{3x}$ である。

$$\begin{aligned}y &= -e^x \int \frac{e^{2x}e^{3x}}{e^{3x}}dx + e^{2x}\int \frac{e^x e^{3x}}{e^{3x}}dx\\ &= -e^x \int e^{2x}dx + e^{2x}\int e^x dx \qquad \text{(i)}\\ &= -e^x \frac{1}{2}e^{2x} + e^{2x}e^x = \frac{1}{2}e^{3x}\end{aligned}$$

非斉次方程式の一般解は (特解) + (斉次方程式の一般解) で与えられるから、解は

$$\underline{y = \frac{1}{2}e^{3x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$$

(**補足**)

(i) 式の積分において、任意定数 C を導入せずに特解のみを求めた。ここに任意定数 C を導入すると、それがそのまま非斉次方程式の一般解となる。試してみよう。

$$\begin{aligned}y &= -e^x \int e^{2x}dx + e^{2x}\int e^x dx\\ &= -e^x\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right) + e^{2x}(e^x + C_2)\\ &= -\frac{1}{2}e^{3x} - C_1 e^x + e^{3x} + C_2 e^{2x}\\ &= \frac{1}{2}e^{3x} + C_1' e^x + C_2 e^{2x}\end{aligned}$$

ただし、$C_1' = -C_1$ と変換した。確かに、任意定数を導入することで公式からそのまま一般解が求められた。

(2) まず、(右辺)=0 とおいた**斉次方程式** の解を求める。$y = e^{\lambda x}$ と置いたときに得られる特性方程式を解くと

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0\\ (\lambda-1)^2 &= 0\\ \lambda &= 1\end{aligned}$$

重解であるから、**斉次方程式** の基本解は $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ となる。

次に、この基本解より得られるロンスキー行列式を求める。

$$\begin{aligned}W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}\\ &= e^x(x+1)e^x - xe^x e^x = e^{2x}\end{aligned}$$

ただし、積の微分より $y_2' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ であることを用いた。

以上を、定数変化法の公式

$$y = -y_1 \int \frac{y_2 r(x)}{W(x)}dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)}dx$$

に代入すると、問題の微分方程式の**特解**が求められる。ただし、$r(x)$ は問題の**非斉次方程式**の右辺で $r(x) = e^x$ である。

$$y = -e^x \int \frac{xe^x e^x}{e^{2x}}dx + xe^x \int \frac{e^x e^x}{e^{2x}}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= -e^x\int x dx + xe^x\int dx \qquad \text{(ii)}\\
&= -e^x\frac{1}{2}x^2 + xe^x x = \frac{1}{2}x^2e^x
\end{aligned}
$$

非斉次方程式の一般解は (特解) + (斉次方程式の一般解) で与えられるから、解は

$$
\underline{y = \frac{1}{2}x^2e^x + C_1e^x + C_2xe^x}
$$

(**補足**)
(ii) 式の積分において、任意定数 C を導入せずに特解のみを求めた。ここに任意定数 C を導入すると、それがそのまま非斉次方程式の一般解となる。試してみよう。

$$
\begin{aligned}
y &= -e^x\int x dx + xe^x\int dx\\
&= -e^x\left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) + xe^x(x + C_2)\\
&= -\frac{1}{2}x^2e^x - C_1e^x + x^2e^x + C_2xe^x\\
&= \frac{1}{2}x^2e^x + C_1'e^x + C_2xe^x
\end{aligned}
$$

ただし、$C_1' = -C_1$ と変換した。確かに、任意定数を導入することで公式からそのまま一般解が求められた。

(3) **斉次方程式** は (2) と共通であるから、基本解が $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$、ロンスキー行列式は $W(x) = e^{2x}$ であることはあらかじめわかっている。

以上を、定数変化法の公式

$$
y = -y_1\int\frac{y_2r(x)}{W(x)}dx + y_2\int\frac{y_1r(x)}{W(x)}dx
$$

に代入すると、問題の微分方程式の**特解**が求められる。ただし、$r(x)$ は問題の**非斉次方程式**の右辺で $r(x) = e^{2x}$ である。

$$
\begin{aligned}
y &= -e^x\int\frac{xe^xe^{2x}}{e^{2x}}dx + xe^x\int\frac{e^xe^{2x}}{e^{2x}}dx\\
&= -e^x\int xe^x dx + xe^x\int e^x dx \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}
$$

ここで、$\int xe^xdx$ は部分積分が必要になるので、あらかじめ別に求めておこう。

$$
\begin{aligned}
\int xe^xdx &= xe^x - \int e^x = xe^x - e^x\\
&= (x-1)e^x
\end{aligned}
$$

これを (iii) 式に代入すれば

$$
\begin{aligned}
y &= -e^x(x-1)e^x + xe^xe^x\\
&= e^{2x}
\end{aligned}
$$

非斉次方程式の一般解は (特解) + (斉次方程式の一般解) で与えられるから、解は

$$
\underline{y = e^{2x} + C_1e^x + C_2xe^x}
$$

(**補足**)
(iii) 式の積分において、任意定数 C を導入せずに特解のみを求めた。ここに任意定数 C を導入すると、それがそのまま非斉次方程式の一般解となる。試してみよう。

$$
\begin{aligned}
y &= -e^x\int xe^xdx + xe^x\int e^xdx\\
&= -e^x((x-1)e^x + C_1) + xe^x(e^x + C_2)\\
&= -(x-1)e^{2x} - C_1e^x + xe^{2x} + C_2xe^x\\
&= e^{2x} + C_1'e^x + C_2xe^x
\end{aligned}
$$

ただし、$C_1' = -C_1$ と変換した。確かに、任意定数を導入することで公式からそのまま一般解が求められた。

(4) まず、(右辺)=0 とおいた**斉次方程式** の解を求める。$y = e^{\lambda x}$ と置いたときに得られる特性方程式を解くと

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 + 4 &= 0\\
\lambda &= \pm 2i
\end{aligned}
$$

異なる二つの複素数であるから、**斉次方程式** の基本解は $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$ となる。

次に、この基本解より得られるロンスキー行列式を求める。

$$
\begin{aligned}
W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}\\
&= 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x\\
&= 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2
\end{aligned}
$$

ただし、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ であることを用いた。

以上を、定数変化法の公式

$$
y = -y_1\int\frac{y_2r(x)}{W(x)}dx + y_2\int\frac{y_1r(x)}{W(x)}dx
$$

に代入すると、問題の微分方程式の**特解**が求められる。ただし、$r(x)$ は問題の**非斉次方程式**の右辺で $r(x) = 2\cos 2x$ である。

$$
\begin{aligned}
y &= -\cos 2x\int\frac{\sin 2x\cdot 2\cos 2x}{2}dx\\
&\quad + \sin 2x\int\frac{\cos 2x\cdot 2\cos 2x}{2}dx\\
&= -\cos 2x\int\sin 2x\cos 2x\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +\sin 2x \int \cos 2x \cos 2x\ dx \\
&= -\cos 2x \int \frac{1}{2}\sin 4x\ dx \\
&\quad +\sin 2x \int \frac{1}{2}(\cos 4x + 1)\ dx
\end{aligned}
$$

ただし、$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ より
$\sin\alpha\cos\alpha = (1/2)\sin 2\alpha$、
さらに $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ より
$\cos^2\alpha = (\cos 2\alpha + 1)/2$ を用いている。計算を続けると、

$$
\begin{aligned}
y &= -\cos 2x \int \frac{1}{2}\sin 4x\ dx \\
&\quad +\sin 2x \int \frac{1}{2}(\cos 4x + 1)\ dx \qquad \text{(iv)} \\
&= \frac{1}{8}\cos 2x \cos 4x \\
&\quad +\frac{1}{2}\sin 2x \left(\frac{1}{4}\sin 4x + x\right) \\
&= \frac{1}{8}(\cos 2x\cos 4x + \sin 2x \sin 4x) + \frac{1}{2}x\sin 2x \\
&= \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x
\end{aligned}
$$

なお、最終行の計算には公式 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ を用いた。

非斉次方程式の一般解は (特解) + (斉次方程式の一般解) で与えられるから、解は

$$
\underline{y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x}
$$

である。$\cos 2x$ の項を C_1 の項に含めて

$$
\underline{y = \frac{1}{2}x\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x}
$$

でも良い。

(補足)
(iv) 式の積分において、任意定数 C を導入せずに特解のみを求めた。ここに任意定数 C を導入すると、それがそのまま非斉次方程式の一般解となる。試してみよう。

$$
\begin{aligned}
y &= -\cos 2x \int \frac{1}{2}\sin 4x\ dx \\
&\quad +\sin 2x \int \frac{1}{2}(\cos 4x + 1)\ dx \\
&= -\frac{1}{2}\cos 2x \left(-\frac{1}{4}\cos 4x + C_1\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\sin 2x \left(\frac{1}{4}\sin 4x + x + C_2\right) \\
&= \frac{1}{8}(\cos 2x \cos 4x + \sin 2x \sin 4x) \\
&\quad +\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}C_1\cos 2x + \frac{1}{2}C_2\sin 2x \\
&= \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x
\end{aligned}
$$

ただし、$C_1' = -(1/2)C_1$, $C_2' = (1/2)C_2$ と変換した。確かに、任意定数を導入することで公式からそのまま一般解が求められた。

(補足 2)
(4) の微分方程式 $y'' + 4y = 2\cos 2x$ は、ばねに強制振動が加わった系

$$
m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F\cos\omega t
$$

の例になっていることに注意しよう ($k/m = 4$, $F/m = 2$, $\omega = 2$)。

さらに、今ばね系の固有振動数は $\omega_n = \sqrt{k/m} = 2$ であり、強制振動の振動数 ω と等しく、このような条件では「振動実験」で学んだように**共振**という現象が起こる。

$y \to x$, $x \to t$ と変換するとこの場合の一般解は $x = \frac{1}{2}t\sin 2t + C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$ となるが、**共振**に関連する項は $x_r = \frac{1}{2}t\sin 2t$ である (他の項は通常の振動項)。このグラフを描くと図 1 のようになる。図のように、振動の振幅が $\frac{1}{2}t$ に従って増大しながら振動する。これは、物理的には**強制振動による共振現象によりばねが振り切れる (壊れる)** ことを意味する (ただし、現実の系ではダンパなどで表される減衰項があるのでばねが振り切れることはそうそうない)。

このように、**物理などの応用では解の意味が重要**になってくる。

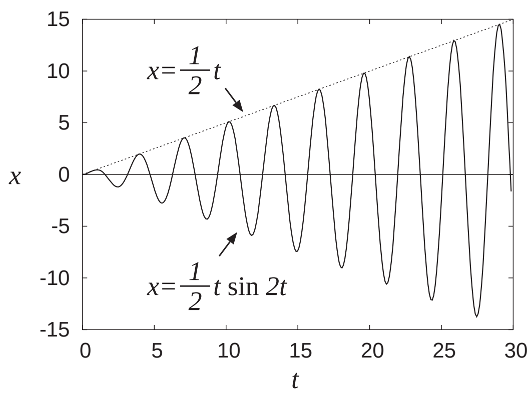

図 1: $x = \frac{1}{2}t\sin 2t$ のグラフ