微分方程式 演習問題 (6) 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式 (1)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

問題

1. 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

について、以下の問いに答えよ。

(a) $y = e^{\lambda x}$ (λ は定数) の形の解を仮定し、問題の微分方程式に代入してみよ。λ に関する方程式が得られるので、それを解け。

(b) 上で得られた方程式の解 λ_1, λ_2 に関し、$y = e^{\lambda_1 x}$ および $y = e^{\lambda_2 x}$ を問題の微分方程式に代入し、それらが解になっていることを確かめよ。

(c) さらに、$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ (C_1, C_2 は任意定数) も解になっていることを確かめよ。実は、これが問題の微分方程式の一般解である。

上と同様の方法で、以下の微分方程式の一般解を求めよ。

2. $y'' + 2y' - 8y = 0$

3. $y'' - 4y' + 3y = 0$

4. $y'' - 2y' - 2y = 0$

[**解答**]

1.(a)

$y = e^{\lambda x}$ を x で微分すると、$y' = \lambda e^{\lambda x}$ および $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ が得られるので、これを問題の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 6e^{\lambda x} &= 0 \\ (\lambda^2 - \lambda - 6)e^{\lambda x} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、$e^{\lambda x} > 0$ は 0 には成り得ないので、

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 6 &= 0 \\ (\lambda + 2)(\lambda - 3) &= 0 \\ \lambda &= -2, 3 \end{aligned}$$

よって、$\underline{\lambda = -2, 3}$。

なお、上の 2 次方程式 $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ のことを**特性方程式**という。

1.(b)

$y = e^{-2x}$ と $y = e^{3x}$ がそれぞれ問題の微分方程式の解となることを示せば良い。$y = e^{-2x}$ を x で微分すると $y' = -2e^{-2x}$、$y'' = 4e^{-2x}$ が得られるから問題の微分方程式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} 4e^{-2x} - (-2e^{-2x}) - 6e^{-2x} &= 4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、$y = e^{-2x}$ は問題の微分方程式の解である。

同様に、$y = e^{3x}$ を x で微分すると $y' = 3e^{3x}$、$y'' = 9e^{3x}$ が得られるから問題の微分方程式の左辺に代入すると、

$$9e^{3x} - (3e^{3x}) - 6e^{3x} = 0$$

よって、$y = e^{3x}$ は問題の微分方程式の解である。

以上から、$y = e^{-2x}$ と $y = e^{3x}$ は問題の微分方程式の解であることが言えた。なお、これらの解のことを**基本解**という。

1.(c)

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ を問題の微分方程式に代入して確かめれば良い。$y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$, $y'' = 4C_1 e^{-2x} + 9C_2 e^{3x}$ であるから、代入すると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 4C_1 e^{-2x} + 9C_2 e^{3x} \\ &\quad -(-2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}) \\ &\quad -6(C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}) \\ &= (4C_1 + 2C_1 - 6C_1)e^{-2x} \\ &\quad +(9C_2 - 3C_2 - 6C_2)e^{3x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって問題の微分方程式が満たされるので、$\underline{y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}}$ <u>はこの微分方程式の**一般解**</u> である。一般に、2 階の微分方程式の一般解には、2 つの任意定数 (ここでは C_1, C_2) が存在する。

2.

1. を踏まえて、簡潔に解答を記述する (実際に問題を解くときは以下の程度の記述で構わない)。

$y = e^{\lambda x}$ の形の解を仮定すると、**特性方程式**

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

が得られる。これを解くと、

$$(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = -4, 2$$

よって、一般解は

$$\underline{y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})}$$

3.
$y = e^{\lambda x}$ の形の解を仮定すると、**特性方程式**

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

が得られる。これを解くと、

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)(\lambda - 1) &= 0 \\ \lambda &= 1, 3 \end{aligned}$$

よって、一般解は

$$\underline{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})}$$

4.
$y = e^{\lambda x}$ の形の解を仮定すると、**特性方程式**

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

が得られる。これは因数分解できないので 2 次方程式の解の公式を用いてこれを解くと、

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$$

よって、一般解は

$$\underline{y = C_1 e^{(1+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{3})x} \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})}$$

[**コメント**]
特性方程式は λ に関する 2 次方程式なので、「**重解の場合**」、「**解が虚数の場合**」などのケースも起こり得る。本日は意図的にそれらの場合を取扱わなかった。次回以降で学ぶ。

なお、力学で登場する運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

は見ての通り 2 階の微分方程式なので、本日扱った内容が関係することがしばしばある。