微分方程式 演習問題 (3) 同次形

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

問題

以下の微分方程式を解け。

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2+xy}$
3. $(3x^2+y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

[**解答**]

1. 右辺の分子分母を x で割ると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$$

これは**同次形**であるので $u = y/x$ の変数変換を行なうと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-u}{1+u} \qquad \text{(i)}$$

一方、$u = y/x$ より $y = ux$ が導かれるが、この両辺を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii) 式より

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{1-u}{1+u}$$

これを du/dx について整理すると

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+2u-1}{u+1}\frac{1}{x} \qquad \text{(iii)}$$

これは**変数分離形**なので、$u^2+2u-1 \neq 0$ を仮定して u を左辺、x を右辺にまとめると

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

この両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

ここで、$f(u) = u^2+2u-1$ に対して $f'(u) = 2u+2$ であることに注意して両辺に 2 をかけると

$$\int \frac{2(u+1)}{u^2+2u-1}\,du = -2\int \frac{1}{x}\,dx$$

公式 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ が左辺に使えることに注意して、

$$\begin{aligned}
\log|u^2+2u-1| &= -2\log|x| + C \\
\log|u^2+2u-1| + 2\log|x| &= C \\
\log|u^2+2u-1| + \log|x|^2 &= C \\
\log|(u^2+2u-1)x^2| &= C \\
|(u^2+2u-1)x^2| &= e^C \\
(u^2+2u-1)x^2 &= \pm e^C \\
(u^2+2u-1)x^2 &= A \quad (A \neq 0) \qquad \text{(iv)}
\end{aligned}$$

ここで、(iii) 式において $u^2+2u-1=0$ を仮定しよう。このとき $u = -1 \pm \sqrt{2}$ (定数関数) となり、(iii) 式は

$$\frac{du}{dx} = 0$$

となる。$u = -1 \pm \sqrt{2}$ (定数関数) はこれを満たすから、$u = -1 \pm \sqrt{2}$ (あるいは $u^2+2u-1=0$) も問題の微分方程式の解と言える。これは (iv) 式において $A = 0$ とおいた場合に相当するから、解は

$$(u^2+2u-1)x^2 = A \quad (A\text{ は任意})$$

と書ける ($A \neq 0$ の条件が無くなったことに注意)。

これに $u = y/x$ を代入して整理すると

$$\underline{y^2+2xy-x^2 = A \quad (A\text{ は任意})}$$

2. 右辺の分子分母を x^2 で割ると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1+\dfrac{y}{x}}$$

これは**同次形**であるので $u = y/x$ の変数変換を行なうと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u^2}{1+u} \qquad \text{(v)}$$

一方、$u = y/x$ より $y = ux$ が導かれるが、この両辺を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \qquad \text{(vi)}$$

(v), (vi) 式より

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{u^2}{1+u}$$

これを du/dx について整理すると

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{1+u}\frac{1}{x}$$

これは**変数分離形**なので、$u \neq 0$ を仮定して u を左辺、x を右辺にまとめると、

$$\frac{1+u}{u}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

両辺を x で積分すると、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+u}{u}\,du &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
\int \left(\frac{1}{u}+1\right)du &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
\log|u| + u &= -\log|x| + C \\
\log|u| + \log|x| &= -u + C \\
\log|ux| &= -u + C \\
|ux| &= e^{-u+C} \\
ux &= \pm e^{C} e^{-u} \\
ux &= Ae^{-u} \quad (A \neq 0)
\end{aligned}$$

ここで $u = y/x$ を代入して y に戻すと、

$$y = Ae^{-\frac{y}{x}} \quad (A \neq 0) \tag{vii}$$

ここまでは $u \neq 0$、すなわち $y \neq 0$ を仮定して解を求めたが、$y = 0$ は問題の微分方程式を満たすのでこれも解である。$y = 0$ は (vii) 式において、$A = 0$ とおいた場合に相当するから、まとめると解は

$$\underline{y = Ae^{-\frac{y}{x}} \quad (A\text{ は任意})}$$

3. 右辺を $3x^2 + y^2$ で割ると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2+y^2}$$

この右辺の分子分母を x^2 で割ると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\dfrac{y}{x}}{3+\dfrac{y^2}{x^2}}$$

これは**同次形**であるので $u = y/x$ の変数変換を行なうと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2u}{3+u^2} \tag{viii}$$

一方、$u = y/x$ より $y = ux$ が導かれるが、この両辺を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \tag{ix}$$

(viii), (ix) 式より

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{2u}{3+u^2}$$

これを du/dx について整理すると

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u(1+u^2)}{3+u^2}\frac{1}{x}$$

これは**変数分離形**なので、$u \neq 0$ を仮定して u を左辺、x を右辺にまとめると、

$$\frac{3+u^2}{u(1+u^2)}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{3+u^2}{u(1+u^2)}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

左辺の積分がやや難しいが、被積分関数を以下の様に部分分数に分解する方針をたてるとうまくいく。

$$\frac{3+u^2}{u(1+u^2)} = \frac{a}{u} + \frac{bu+c}{1+u^2}$$

上式で未知数 a, b, c を求めるために 両辺に $u(1+u^2)$ をかけると、

$$\begin{aligned}
3 + u^2 &= a + au^2 + bu^2 + cu \\
&= a + cu + (a+b)u^2
\end{aligned}$$

両辺見比べて、$a = 3, b = -2, c = 0$ がわかる。以上で部分分数に分解できたので積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{3}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right)du &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
3\log|u| - \log(1+u^2) &= -\log|x| + C \\
\log|u|^3 - \log(1+u^2) + \log|x| &= C \\
\log\left|\frac{u^3x}{1+u^2}\right| &= C \\
\left|\frac{u^3x}{1+u^2}\right| &= e^C \\
\frac{u^3x}{1+u^2} &= \pm e^C \\
\frac{u^3x}{1+u^2} &= A \quad (A \neq 0)
\end{aligned}$$

ここで $u = y/x$ を代入して整理すると、

$$y^3 = (x^2+y^2)A \quad (A \neq 0) \tag{x}$$

ここまでは $u \neq 0$、すなわち $y \neq 0$ を仮定して解を導いたが、$y = 0$ なる定数関数も問題の微分方程式を満たす。これは (x) 式において $A = 0$ と置いた場合に相当する。

まとめると、

$$\underline{y^3 = (x^2+y^2)A \quad (A\text{ は任意})}$$